BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR - session 2000

GÉOMÈTRE TOPOGRAPHE

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h **Coefficient 2**

L'usage de la calculatrice et des instruments de calcul est autorisé.

GT NAT

EXERCICE 1 *(6 points)*

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'unité de mesure d'angle est le radian.

Sur une sphère de centre O :

- deux points A et B déterminent l'arc $\widehat{AB}$ sur le grand cercle passant par A et B ;
- trois points A, B, C déterminent les arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ qui constituent le "triangle sphérique" ABC .

Avec les notations usuelles :

- a désigne la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$;
- A désigne la mesure de l'angle formé par les tangentes en A aux arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$.

On rappelle la formule : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

1°/ On considère les points A (1 ;1 ;1) et B $(0 ; \sqrt{3} ; 0)$.

Déterminer une équation de la sphère (S), de centre O, passant par A.

Justifier que B appartient à (S).

Calculer $\cos \widehat{AOB}$ et $\sin \widehat{AOB}$.

2°/ Soit r une rotation d'axe (OB) et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Déterminer l'image de (S) par r et en déduire que l'image C du point A par r est un point de (S). Quelle est l'image par r de l'arc $\widehat{AB}$?

Que peut-on en déduire :

- pour la mesure d'angle B ;
- pour a et c, côtés du triangle sphérique ?

Calculer b, A et C.

EXERCICE 2 *(14 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 1 cm).

Soit I l'inversion de pôle O et de puissance -9.

- A -

1°/ Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[A_1A_2]$ avec $A_1 (-1 ; 0)$ et $A_2 (9 ; 0)$.

Déterminer $I(A_1)$ et $I(A_2)$.

Montrer que $(\mathscr{C})$ est globalement invariant par I.

2°/ Soit $(\mathscr{E})$ la conique d'équation $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Reconnaître la nature de $(\mathscr{E})$. Préciser l'axe focal et les sommets de cette conique. Déterminer les points d'intersection C et D de $(\mathscr{E})$ avec l'axe des ordonnées.

3°/ Représenter $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{C})$ sur un même dessin.

- B -

Soit $(\mathscr{H})$ la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=5+4\cos\theta$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ Montrer que pour tracer $(\mathscr{H})$ on peut d'abord se restreindre à prendre θ dans l'intervalle $[\,0\,;\pi\,]$.

2°/ Étudier le sens de variation de ρ sur $[\,0\,;\pi\,]$.

Préciser les tangentes à $(\mathscr{H})$ aux points correspondant à $\theta=0$ et $\theta=\pi$.

3°/ Tracer $(\mathscr{H})$ sur le même dessin que $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{C})$.

(On placera les points de $(\mathscr{H})$ correspondant à $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$).

- C -

Soit M un point du plan et $(r\,;\,\theta)$ un couple de coordonnées polaires de ce point.

1°/ Donner, en fonction de r et θ, les coordonnées cartésiennes de M.

2°/ $M(r\,;\theta)$ est maintenant un point de $(\mathscr{E})$.

Vérifier que r et θ sont tels que $[\,4r\cos\theta+9\,]^2=25r^2$.

En déduire que soit $r=r_1(\theta)=\dfrac{-9}{5+4\cos\theta}$, soit $r=r_2(\theta)=\dfrac{9}{5-4\cos\theta}$.

Dans le premier cas, comment peut-on, géométriquement, traduire la relation entre points de $(\mathscr{E})$ et $(\mathscr{H})$ ayant un même angle polaire θ ?

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab)=\ln a + \ln b$, où $a>0$ et $b>0$

$\exp(a+b)=\exp a \times \exp b$

$\cos(a+b)=\cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b)= \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t=2\cos^2 t-1=1-2\sin^2 t$

$\sin 2t=2\sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q =-2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})$

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})$

$e^{at}=e^{\alpha t}(\cos \beta t+i \sin \beta t)$, où $a=\alpha+i\beta$

2. DERIVEES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t$
$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$e^{at} (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}

3. DEVELOPPEMENTS LIMITES :

$$e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\dots+(-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\dots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\dots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\varepsilon(t)$$

4. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique :

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i \, c_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - (\overline{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$$

$$y = ax+b \text{ , où } a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad ; \quad x = a'y+b' \text{ , où } a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

5. PROBABILITES :

a) Loi binomiale:

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$E(X) = np \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \qquad E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

k \ λ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.1637	0.2222	0.2681	0.3032	0.3293
2	0.0163	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0011	0.0033	0.0071	0.0126	0.0198
4		0.0002	0.0007	0.0015	0.0030
5			0.0001	0.0001	0.0003

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.0498	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.000	0.002	0.006	0.013
18									0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.000	0.002
21											0.001
22											0.000

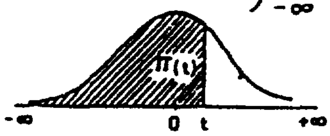
c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t)=P(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,952 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,985 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,928 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(t)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Note. — La table donne les valeurs de Π(t) pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour t = 1,37 Π(t = 1,37) = 0,914 7
pour t = — 1,37 Π(t = — 1,37) = 0,085 3