

**BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR****Épreuve de Mathématiques****GROUPEMENT C***Durée : 2 heures*

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	2
Étude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux	2
Industries céramiques	2
Industries céréalières	2
Industries des matériaux souples (2 options)	1
Industries papetières	2
Mise en forme des alliages moulés	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique bois et ameublement	1,5
Productique textile (4 options)	2
Réalisation d'ouvrages chaudronnés	2
Systèmes constructifs bois et habitat	2

*Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.*

*Ce sujet comporte 2 pages numérotées de 1/2 à 2/2.*

*Plus le formulaire de mathématiques page 1 à 5*

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**CALCULATRICE AUTORISÉE**

*Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.*

*Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.*

*Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.*

**EXERCICE 1 : (11 points)**

A - On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' + 4y' + 4y = 8$ , où  $y$  désigne une fonction de la variable réelle  $x$  définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1) Vérifier que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2$  est une solution de (E).

2) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .

3) En déduire l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle (E).

4) Déterminer la solution  $f$  de l'équation (E) qui vérifie les conditions

$$f(0) = 2 \text{ et } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2} + 2.$$

B - Soit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = xe^{-2x} + 2$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ , puis la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) En déduire que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .

c) Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

2) Calculer  $f'(x)$ . Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

3) Tracer  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées).

4) Soit la fonction  $k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $k(x) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{-2x}$ .

Calculer  $k'(x)$ .

En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine compris entre  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 4$ .

On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale arrondie à  $10^{-2}$  près.

**EXERCICE 2 : (9 points)**

Les parties A, B, et C sont indépendantes.

**A** - Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M1 et M2 pour fabriquer des pièces cylindriques en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,010 et 0,008.

De plus, la probabilité de l'événement : "la machine M2 est en panne sachant que M1 est en panne" est égale à 0,4.

1) Montrer que la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment est égale à 0,004.

2) En déduire la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne.

**B** - Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre des pièces fabriquées.

1) On admet que la variable aléatoire  $X$  qui, à chaque pièce prélevée au hasard, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2.

Une pièce est défectueuse si son diamètre n'appartient pas à l'intervalle  $[246 ; 254]$ .

On prélève au hasard une pièce dans la production.

Calculer la probabilité d'avoir une pièce défectueuse.

2) On admet dans la suite que la probabilité de prélever une pièce défectueuse dans la production est égale à 0,046. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 pièces prises au hasard, associe le nombre de pièces défectueuses de ce lot. Un lot de 50 pièces prises au hasard peut-être assimilé à un tirage avec remise.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Y$ . Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse dans un lot. (On donnera une valeur décimale approchée arrondie à  $10^{-3}$  près).

c) Calculer la probabilité d'avoir au plus 2 pièces défectueuses dans un lot. (On donnera une valeur décimale approchée arrondie à  $10^{-3}$  près).

3) Après un certain temps de fonctionnement de la machine, pour vérifier le bien fondé de l'hypothèse faite en B.1), on s'intéresse à la moyenne des diamètres des pièces produites.

Pour cela, on étudie un échantillon de 100 pièces prises au hasard et avec remise dans la production.

La moyenne  $\bar{x}$  des diamètres des pièces de cet échantillon est égale à 249,7. On suppose que la variable aléatoire  $\bar{X}$  qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise, associe la moyenne des diamètres de ces pièces suit une loi normale de moyenne inconnue  $\mu$  et

d'écart type  $\frac{2}{\sqrt{100}}$ . Au vu de l'échantillon, déterminer un intervalle de confiance centré en  $\bar{x}$  de la moyenne  $\mu$  avec le coefficient de confiance 95%.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

---

SESSION 2000

## **BTS : groupement C**

**AGROEQUIPEMENT**

**ETUDE ET REALISATION D'OUTILLAGES  
DE MISE EN FORME DES MATERIAUX**

**INDUSTRIES CERAMIQUES**

**INDUSTRIES CEREALIERES**

**INDUSTRIES DES MATERIAUX SOUPLES**

**INDUSTRIES PAPETIERES**

**MISE EN FORME DES ALLIAGES MOULES**

**MISE EN FORME DES MATERIAUX PAR FORGEAGE**

**PRODUCTIQUE BOIS ET AMEUBLEMENT**

**PRODUCTIQUE TEXTILE**

**REALISATION D'OUVRAGES CHAUDRONNES**

**SYSTEMES CONSTRUCTIFS BOIS ET HABITAT**

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

### 1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}), \quad \text{ch } t = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}), \quad \text{sh } t = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t})$$

$$e^{a t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

### 2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

#### a) Limites usuelles

##### Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

##### Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

##### Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

**b) Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
$e^t$	$e^t$	$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\operatorname{Arc} \sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{Arc} \tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	$ae^{at}$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^a)' = a u^{a-1} u'$$

**c) Calcul intégral**

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

**d) Développements limités**

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

**e) Equations différentielles**

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où $G$ est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique :	Si $\Delta > 0$ , $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$ , $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt} \dots$ où $r$ est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$ , $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
$ar^2 + br + c = 0$ de discriminant $\Delta$	

**3. PROBABILITES**

a) **Loi binomiale**  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  où  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  ;  $E(X) = np$  ;  $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

c) **Loi exponentielle**

Fonction de fiabilité :  $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ (M.T.B.F.)}$$

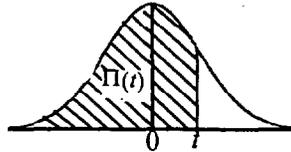
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota :  $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$