ASSISTANT EN CRÉATION INDUSTRIELLE

EXERCICE 1 (12 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I = [1 ; 8] par $f(x) = \frac{-1}{4}x^3 + 3x^2 - 9x + 10$.

On note $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

1. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b. En déduire le signe de f' et le tableau de variations de f sur I.
2. Construire $\mathscr{C}f$ avec précision
3. Sur le graphique de la question 2, colorier le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}f$, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 8$. Montrer que son aire est égale à $\frac{665}{16}$ cm^2.

4. a. Sur le graphique de la question 2, placer les points M(8,0), M'(10,2), P(8,2) et P'(10,4), puis tracer les segments [MM'] et [PP'].

   b. Tracer en pointillé la transformée $\mathscr{D}$' de $\mathscr{D}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
   c. Le domaine décrit dans la question 3 constitue en fait la face avant d'une pièce de bois usinée, et les segments [MM'] et [PP'] deux de ses arêtes latérales orthogonales au plan contenant la face $\mathscr{D}$, vues en perspective cavalière.
   Achever le dessin de cette pièce en perspective cavalière, en traçant en pointillé les arêtes cachées et en trait plein celles qui sont visibles, sachant que les arêtes latérales sont parallèles et de même longueur et que $\mathscr{D}$' est la face arrière de cette pièce.
5. L'arête [MM'] mesure 8 cm en réalité. Calculer, en cm^3, le volume exact de la pièce de bois.

EXERCICE 2 (8 points)

Une machine fabrique des tiges. On mesure la longueur de 100 tiges et on obtient les résultats suivants :

Intervalles (en mm)	[16,17[	[17,18[	[18,19[	[19,20[	[20,21[	[21,22[	[22,23[
Effectifs	1	5	11	56	13	11	3

1. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de la moyenne m et de l'écart type σ de cette série statistique.
2. On admet pour la suite que la taille T des tiges produites par la machine suit une loi normale de paramètres (19,7 ; 1).
   Calculer p $(T \geq 20,5)$.
3. Une tige est défectueuse lorsque sa taille n'est pas dans l'intervalle [17,22].
   a. Calculer la probabilité qu'une tige soit défectueuse.
   b. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses sur un lot de 100 tiges produites. Quelle est la loi de X ?
   c. On admettra que l'on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre 2,5.
   Calculer $p(X \leq 2)$.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a>0$ et $b>0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin 2t = 2\sin t \cos t$

2. DERIVEES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

3. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - (\bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}$$

$y = ax + b$, où $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$; $x = a'y + b'$, où $a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

4. PROBABILITES :

a) Loi binomiale :

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \qquad \text{où} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$E(X) = np \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

k \ λ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.1637	0.2222	0.2681	0.3032	0.3293
2	0.0163	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0011	0.0033	0.0071	0.0126	0.0198
4		0.0002	0.0007	0.0015	0.0030
5			0.0001	0.0001	0.0003

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.0498	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.000	0.002	0.006	0.013
18									0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.000	0.002
21											0.001
22											0.000

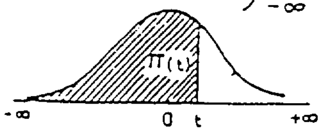
c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0.1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0.2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0.3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0.4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0.5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0.6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0.7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0.8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0.9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,952 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,985 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,928 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1{,}37$ $\quad \Pi(t = 1{,}37) = 0{,}914\,7$
pour $t = -1{,}37$ $\quad \Pi(t = -1{,}37) = 0{,}085\,3$