BTS CHIMISTE

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures ***Coefficient : 3***

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 (10 points)

Une entreprise fabrique des flacons destinés à contenir une substance particulière. Un flacon est dit conforme s'il vérifie un ensemble de critères définis par l'entreprise. On appelle p la proportion de flacons conformes dans l'ensemble de la production.

Première partie

Un processus de contrôle de la conformité des flacons a été mis au point par l'entreprise. On s'intéresse dans cette partie aux risques d'erreurs de ce contrôle et on suppose que la proportion p de flacons conformes est égale à 0,8.

On prélève un flacon au hasard dans l'ensemble de la production.

On note :

C l'événement : « le flacon prélevé est conforme » ; on a donc $P(C) = 0{,}8$.

A l'événement : « le flacon prélevé est accepté par le contrôle ».

Une étude préliminaire a permis d'estimer les risques d'erreurs de ce contrôle :

- la probabilité de refuser un flacon sachant qu'il est conforme est de 0,05 ; on a donc $P(\bar{A}|C) = 0{,}05$.
- la probabilité d'accepter un flacon sachant qu'il n'est pas conforme est de 0,1 ; on a donc $P(A|\bar{C}) = 0{,}1$.

1. a) Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté sachant qu'il est conforme.

b) Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté par le contrôle.

c) Déterminer la probabilité qu'un flacon ne soit pas conforme sachant qu'il a été accepté par le contrôle. (Arrondir le résultat au centième).

2. On admet que la probabilité de choisir un flacon non conforme parmi ceux qui ont été acceptés par le contrôle est égale à 0,03.

On prélève au hasard et avec remise des échantillons de 100 flacons dans l'ensemble des flacons qui ont été acceptés par le contrôle.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de flacons non conformes de cet échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson.

Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?

Calculer, à l'aide de cette loi de Poisson, une valeur approchée de la probabilité de l'événement ($X > 5$).

Seconde partie

On se propose de construire et d'utiliser un test unilatéral pour valider ou refuser, au seuil de risque 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion p de flacons conformes dans l'ensemble de la production, sur une période donnée, est égale à 0,8. (Hypothèse nulle H_0 : "$p = 0{,}8$" ; hypothèse alternative H_1 : "$p < 0{,}8$").

Pour cela, on prélève au cours de cette période dans l'ensemble de la production des échantillons de 200 flacons, au hasard et avec remise.

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe la proportion de flacons conformes de cet échantillon. On admet que la loi de F est une loi normale $\mathcal{N}(p\,;\sigma)$.

1. Sous l'hypothèse H_0 :

a) Montrer qu'une valeur approchée de σ est 0,03.

b) Déterminer le réel positif h tel que $P(F \geq 0{,}8 - h) = 0{,}95$. (Arrondir le résultat au centième).

2. Enoncer la règle de décision relative à ce test de validité d'hypothèse.

3. Dans un échantillon de 200 flacons, on a trouvé 156 flacons conformes.

Au vu de cet échantillon, doit-on, au seuil de risque 5 %, accepter ou refuser l'hypothèse "$p = 0{,}8$" ?

EXERCICE 2 (10 points)

L'objet de cet exercice est l'étude du potentiel électrique dans un électrolyte.

On considère un électrolyte, le chlorure de sodium NaCl, mis en solution dans l'eau à la température de 25° C et de concentration 10^{-2} mol. L^{-1}.
Un ion Na^+ étant choisi, on prend son centre comme origine de l'espace rapporté à un repère. Cet ion crée, en tout point de l'atmosphère ionique qui l'entoure, un potentiel électrique U, fonction de la distance x de ce point au centre de l'ion considéré.

1. ***Expression de*** $U(x)$.

On admet que cette fonction U de la variable réelle x, avec $x > 0$, est solution de l'équation différentielle (E) : $x^2U'' + 2xU' = b^2x^2U$, où b est une constante réelle **strictement** positive.

a) Pour tout $x > 0$, on pose $Y(x) = xU(x)$.

Calculer $Y'(x)$ et $Y''(x)$.

On considère l'équation différentielle (E_1) : $Y'' - b^2Y = 0$.

Démontrer que Y est solution de (E_1) si et seulement si U est solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

En déduire, pour tout $x > 0$, l'égalité (i) : $U(x) = \dfrac{1}{x}(A\mathrm{e}^{-bx} + B\mathrm{e}^{bx})$, où A et B sont des constantes réelles.

2. ***Calcul de la constante B.***

Le potentiel étant nul à l'infini, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = 0$.

Montrer, en utilisant l'égalité (i), qu'alors $B = 0$. (On montrera que si B était non nulle, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x)$ serait égale à $+\infty$). On a donc, pour tout $x > 0$, $U(x) = \dfrac{A}{x}\mathrm{e}^{-bx}$.

3. ***Calcul de la constante A.***

a) Soit α un nombre réel supérieur ou égal à 4.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer, en fonction de α, l'intégrale $I(\alpha) = \int_4^{\alpha} x\mathrm{e}^{-bx}\mathrm{d}x$.

Déterminer la limite I de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

b) L'expression de l'électroneutralité conduit à l'égalité $A.I = k$, où k est une constante réelle positive.

Exprimer A en fonction de b et de k.

En déduire que, pour tout $x > 0$, $U(x) = \dfrac{kb^2}{1+4b}\,\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-b(x-4)}$.

4. ***Tableau de variation de U, pour des valeurs particulières de b et de k.***

On considère que, pour tout $x > 0$, $U(x) = \dfrac{0{,}16}{x}\,\mathrm{e}^{-0{,}0325\,(x-4)}$.

a) Calculer $U'(x)$ et étudier le sens de variation de U.

b) Calculer la limite de U en 0.

c) Donner le tableau de variation de U.

BTS CHIMISTE

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

1 – Relations fonctionnelles

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, *où* $a > 0$ *et* $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin 2t = 2\sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $ch\, t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, $sh\, t = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$, *où* $a = \alpha + i\beta$

2 – Dérivées et Primitives

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha\, t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
$ch\, t$	$sh\, t$
$sh\, t$	$ch\, t$
$Arc \sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$Arc \tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	$a\, e^{at}$

3 – Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^a = 1 + \frac{a}{1!} t + \frac{a(a-1)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

4 – Statistique descriptive

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad\qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \right) - (\bar{x})^2 \qquad\qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) - \bar{x}\bar{y}$$

Droite d'ajustement :

$$y = a\,x + b, \ où \ \ a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}}; \qquad\qquad x = a'\,y + b', \ où \ \ a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{y^2}}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

5 – Probabilités :

a) Loi binomiale :

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad où\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$E(X)=np \qquad \sigma(X)=\sqrt{n\,p\,q}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

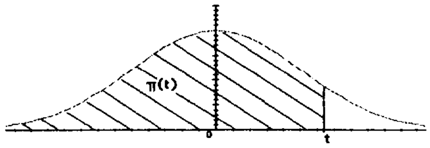
k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917,7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990,6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. – La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : *Pour* $t = 1{,}37$ $\qquad \pi(t = 1{,}37) = 0{,}914\,7$

Pour $t = -1{,}37$ $\qquad \pi(t = -1{,}37) = 0{,}085\,3$