BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GÉOMÈTRE-TOPOGRAPHE

session 2001

Épreuve de MATHÉMATIQUES

durée : 2 heures **coefficient : 2**

L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On considère la parabole $\mathscr{P}$, représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

On oriente $\mathscr{P}$ dans le sens des abscisses croissantes. En chaque point M de $\mathscr{P}$ on désigne par $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent et par $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal.

On rappelle que la base $(\vec{T},\vec{N})$ est directe et que le rayon de courbure algébrique R, au point de $\mathscr{P}$ d'abscisse x, est donné par la formule :

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},\text{ avec } y'=f'(x) \text{ et } y''=f''(x).$$

1°/ Tracer $\mathscr{P}$, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[-4\,;4]$, en prenant 2 cm pour unité graphique.

2°/ Étudier le sens de variation de la fonction R.
En déduire le minimum du rayon de courbure et tracer le cercle de courbure correspondant sur le graphique précédent.

3°/ On se place désormais au point A, d'abscisse 1, de la parabole $\mathscr{P}$.

a) Déterminer une équation de la tangente et une équation de la normale à $\mathscr{P}$ en ce point.

b) Montrer que le vecteur $\vec{U}$, de coordonnées $(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2})$, est unitaire et qu'il est directeur de la normale à $\mathscr{P}$ au point A.

c) On admet que $\vec{N}$ est égal à $\vec{U}$.

Montrer que les coordonnées du centre de courbure Ω sont $(-1\,;\frac{5}{2})$.

d) Tracer la tangente et la normale à $\mathscr{P}$ au point A.

Représenter les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ au point A.

e) Tracer le cercle de courbure $\mathscr{C}$ au point A et montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est

$$x^2+y^2+2x-5y-\frac{3}{4}=0.$$

4°/ a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ sont solutions de l'équation

$$x^4-6x^2+8x-3=0.$$

b) Vérifier que $x^4-6x^2+8x-3=(x+3)(x-1)^3$.

En déduire que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ n'ont qu'un seul autre point d'intersection que A.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab)=\ln a + \ln b$, où $a>0$ et $b>0$

$\exp(a+b)=\exp a \times \exp b$

$\cos(a+b)=\cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b)=\sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t=2\cos^2 t-1=1-2\sin^2 t$

$\sin 2t=2\sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})$

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})$

$e^{at}=e^{\alpha t}(\cos \beta t+i \sin \beta t)$, où $a=\alpha+i\beta$

2. DERIVEES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t$
$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$e^{at} (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}

3. DEVELOPPEMENTS LIMITES :

$$e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\ldots+(-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\ldots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\varepsilon(t)$$

GT MAT

4. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad\qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - (\bar{x})^2 \qquad\qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$y = ax + b \text{ , où } a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad ; \quad x = a'y + b' \text{ , où } a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

5. PROBABILITES :

a) Loi binomiale:

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$E(X) = np \qquad\qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \qquad\qquad E(X) = \lambda \qquad\qquad V(X) = \lambda$$

k \ λ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.1637	0.2222	0.2681	0.3032	0.3293
2	0.0163	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0011	0.0033	0.0071	0.0126	0.0198
4		0.0002	0.0007	0.0015	0.0030
5			0.0001	0.0001	0.0003

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0.223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0.000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0.003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,063	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

c) <u>Loi normale</u> :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t)=P(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

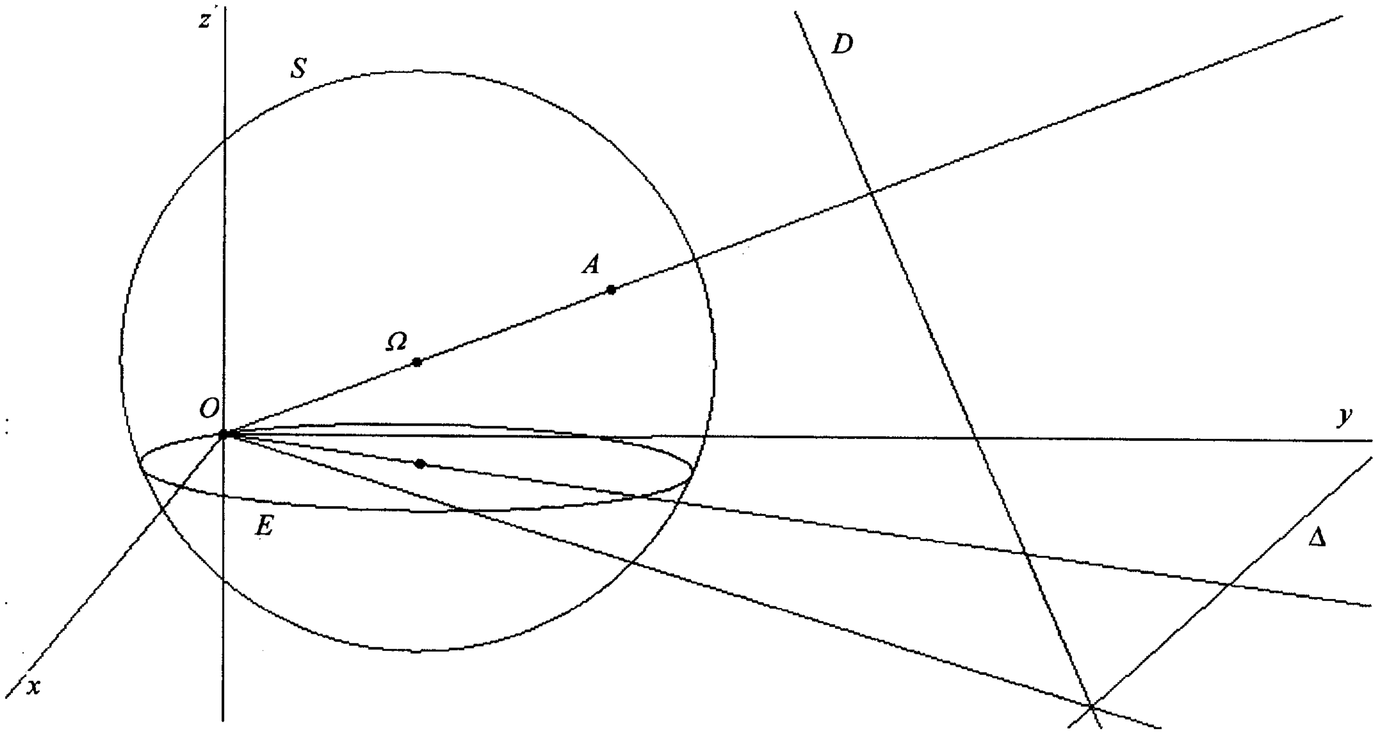
Nota. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1,37$ $\qquad \Pi(t = 1,37) = 0,914\,7$

pour $t = -1,37$ $\qquad \Pi(t = -1,37) = 0,085\,3$

EXERCICE 2 (10 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (Le schéma donné ci-dessous met en perspective quelques éléments de l'exercice, sans prétendre en donner une représentation exacte).



S est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z=0$.

T est la transformation qui, à chaque point M de l'espace, différent de O, associe le point M' tel que

$\overrightarrow{OM'}=\dfrac{54}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

1°/ Déterminer le centre Ω et le rayon r de S.

2°/ a) En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}$, montrer que T est une inversion, dont on précisera le pôle et le rapport.

b) Le point A est le symétrique de O par rapport à Ω.

Calculer les coordonnées de $A'=T(A)$.

Déterminer l'inverse, P, de la sphère S privée du point O, par T.

Montrer qu'une équation de P est $2x+2y+z-27=0$.

t.s.v.p

3°/ Soit D la droite dont une représentation paramétrique est :

$$x = 2 - t\ ;\ y = 14 + 2t\ ;\ z = 5 - 2t\ ;\ t \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que la droite D est incluse dans P et que le point A' appartient à D.

b) Déterminer l'inverse C de la droite D, par T.

c) Pour tout point M de D, de coordonnées (x, y, z), on note (x', y', z') les coordonnées de son inverse M' par T.

Montrer qu'une représentation paramétrique de C est :

$$x' = \frac{-6t + 12}{t^2 + 8t + 25}\ ;\ y' = \frac{12t + 84}{t^2 + 8t + 25}\ ;\ z' = \frac{-12t - 30}{t^2 + 8t + 25}\ ;\ t \in \mathbb{R}.$$

d) Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de C avec le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4°/ Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ coupe le plan P suivant la droite Δ et coupe la sphère S suivant le cercle E.

a) Déterminer l'inverse de Δ par T.

b) Montrer que le vecteur de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ est un vecteur directeur de Δ.

c) En déduire l'angle géométrique θ, appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, des deux courbes C et E.