

# B.T.S. ELECTRONIQUE

- SESSION 2001 -

*Calculatrice à fonctionnement autonome autorisée  
(circulaire 99-186 du 16.11.99)*

## **Epreuve de Physique appliquée**

**Durée : 4 heures**

**Coefficient : 5**

Le candidat répondra aux questions sur le texte même de l'épreuve, qu'il inclura dans une copie double à remettre aux surveillants en quittant la salle d'examen. Si la place allouée pour telle ou telle réponse semble insuffisante, il est possible, en le précisant clairement, d'utiliser le verso de la feuille précédente.

Le candidat trouvera des données indiquées sous la forme  $J = 4,0 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ . Il ne s'agit pas d'une erreur : le chiffre 0, après la virgule, indique que la grandeur J est connue avec deux chiffres significatifs.

L'épreuve comporte quatre parties très largement indépendantes :

1. Etude du moteur
2. Etude de la boucle de courant
3. Etude de l'asservissement de vitesse
4. Mesure de la valeur efficace du courant appelé par le moteur.

Plusieurs questions permettent aux candidats soit d'effectuer des "auto-contrôles", soit de poursuivre la résolution d'une partie où ils rencontreraient quelques difficultés.

## Introduction aux parties 1, 2 et 3

La machine à découpage étudiée doit assurer le déplacement de l'outil selon les trois axes X, Y et Z. Ces déplacements sont créés par trois moteurs à courant continu à aimants permanents. L'épreuve porte sur la commande de l'axe Y.

### 1. ETUDE DU MOTEUR

#### **1.1 Mise en équations**

Le moteur est considéré comme un récepteur électrique alimenté par une tension continue  $u(t)$ , exprimée en volts, qui peut varier au cours du temps. Sa force électromotrice est notée  $e(t)$  et sa résistance  $R$ . On néglige son inductance d'induit. Son couple moteur est noté  $C_m(t)$  et sa vitesse angulaire  $\Omega(t)$ . Il absorbe un courant  $i(t)$ , toujours exprimé en ampères.

Le flux magnétique par pôle est considéré comme constant et seules les pertes par effet Joule sont prises en considération.

Dans ces conditions,  $k$  étant la constante caractéristique du moteur, on rappelle que :

$$C_m(t) = k i(t) \quad (\text{équation 1}) \quad e(t) = k \Omega(t) \quad (\text{équation 2})$$

**1.1.1.** Etablir le schéma équivalent électrique du moteur alimenté par la tension  $u(t)$  et traversé par le courant  $i(t)$ . Ecrire la loi de la maille correspondante (équation 3)

**1.1.2.** Lorsque la machine n'effectue pas un travail de coupe, le moteur, s'il fonctionne, fonctionne "à vide" : tous les couples résistants susceptibles de s'exercer sur son arbre sont alors supposés nuls. Le moment d'inertie ramené sur l'arbre moteur est noté  $J$ .

Écrire dans ces conditions, la relation fondamentale de la dynamique pour les solides en rotation autour d'un axe (équation 4). Cette équation différentielle relie les variables  $C_m(t)$  et  $\Omega(t)$  et le paramètre  $J$ .

#### **1.2. Calcul de la réponse indicielle du moteur alimenté sous une tension fixe**

**1.2.1.** On note  $U(p)$ ,  $I(p)$ ,  $C_m(p)$ ,  $\Omega(p)$  et  $E(p)$  les transformées de Laplace respectives de  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $C_m(t)$ ,  $\Omega(t)$  et  $e(t)$ . Montrer, en complétant les blocs du schéma causal de la figure 1, que ce schéma traduit les équations (1), (2), (3) et (4).

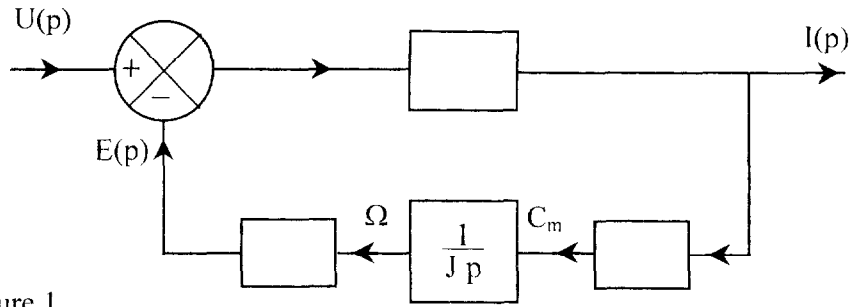


Figure 1

1.2.2. Déduire de la question précédente les expressions des transmittances  $H_1(p)$  et  $K_1(p)$  de la figure 2, en les inscrivant dans les blocs correspondants.

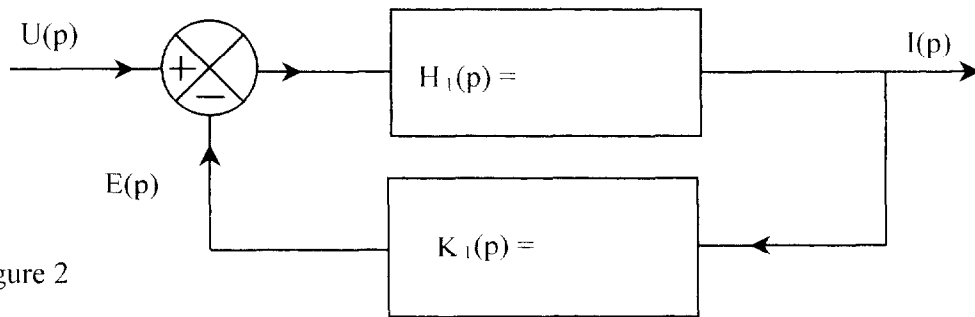


Figure 2

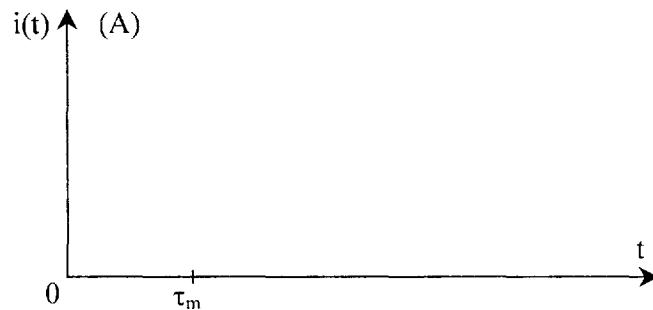
1.2.3. Déterminer la fonction de transfert  $T_3(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$  et la mettre sous la forme

$T_3(p) = \frac{1}{R} \frac{\tau_m p}{1 + \tau_m p}$ . Exprimer la constante de temps  $\tau_m$  et calculer sa valeur sachant que

$R = 2,5 \Omega$  ;  $k = 0,20 \text{ V.s. rad}^{-1}$  ;  $J = 4,0 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ . Calculer **numériquement**  $T_3(p)$ .

1.2.4. Calculer la réponse  $i(t)$  à un échelon de tension de 30 volts appliqué aux bornes du moteur. On rappelle les relations suivantes :  $\frac{A}{p} \xrightarrow{TL^{-1}} A$  et  $\frac{1}{p+a} \xrightarrow{TL^{-1}} e^{-a t}$ .

1.2.5. Tracer le graphe de  $i(t)$  en y représentant la tangente à l'origine.



1.2.6. A partir des hypothèses admises (inductance négligeable, couples résistants nuls), justifiez physiquement les valeurs trouvées pour  $i(0)$  et  $i(\infty)$ .

1.2.7. Le constructeur du moteur donne  $I_{\max} = 4,8$  A. Comparer  $I_{\max}$  et la valeur  $i(0)$  précédente (question 1.2.5). Calculer la valeur maximale  $U_o$  de l'échelon de tension qui, appliqué directement au moteur, permet à  $i(t)$  de ne pas dépasser la valeur  $I_{\max} = 4,8$  A.

1.2.8. On applique au moteur un échelon de tension d'amplitude  $U_o$  (valeur déterminée ci-dessus). Quelle est la vitesse angulaire maximale  $\Omega_{\max}$  atteinte par le rotor ? En déduire la fréquence de rotation correspondante  $n_{\max}$  (en  $\text{tr.s}^{-1}$ ).

## 2. ETUDE DE LA BOUCLE DE COURANT

Cette étude concerne la phase de mise en route de la machine, avant son travail de découpe. Dans cette partie aussi, l'influence de l'inductance  $L$  de l'induit du moteur et tous les couples résistants sont négligés.

La vitesse angulaire  $\Omega_{\max}$  précédente est trop faible ; il faut pouvoir augmenter la tension  $u(t)$  au delà de 12 volts tout en limitant le courant  $i(t)$  dans les phases de démarrage. On y parvient grâce à une boucle d'asservissement appelée boucle de courant dont la variable d'entrée est le courant de consigne  $i_c(t)$ .

Pour pouvoir comparer  $i(t)$  à  $i_c(t)$ , on prélève la tension aux bornes d'une petite résistance  $r$  placée en série avec l'induit parcouru par  $i(t)$ .

Le moteur est alimenté par un hacheur à largeur d'impulsion modulée (PWM) de rapport cyclique  $\alpha$  variable et de fréquence constante élevée (16 kHz) devant la bande passante du système. Ce hacheur est lui-même alimenté par deux tensions  $+V_{cc}$  et  $-V_{cc}$  et tout se passe comme si le moteur était alimenté par une tension  $u(t) = \alpha(t) V_{cc}$ , avec  $-1 \leq \alpha(t) \leq 1$ .

Il en résulte le schéma fonctionnel de la figure 3 dans laquelle on compare en fait les tensions  $v_r(t) = r i(t)$  et  $v_c(t) = r i_c(t)$  et où :

$T_1(p)$  représente la transmittance d'un correcteur qui sera étudié un peu plus loin ;

$T_2(p) = \frac{V_{cc}}{r I_{c\max}}$  représente la transmittance simplifiée du hacheur,  $I_{c\max}$  étant la valeur maximale du courant de consigne ;

$T_3(p) = \frac{1}{R} \frac{\tau_m p}{1 + \tau_m p}$  représente la transmittance du moteur et  $R$  la résistance de son induit.

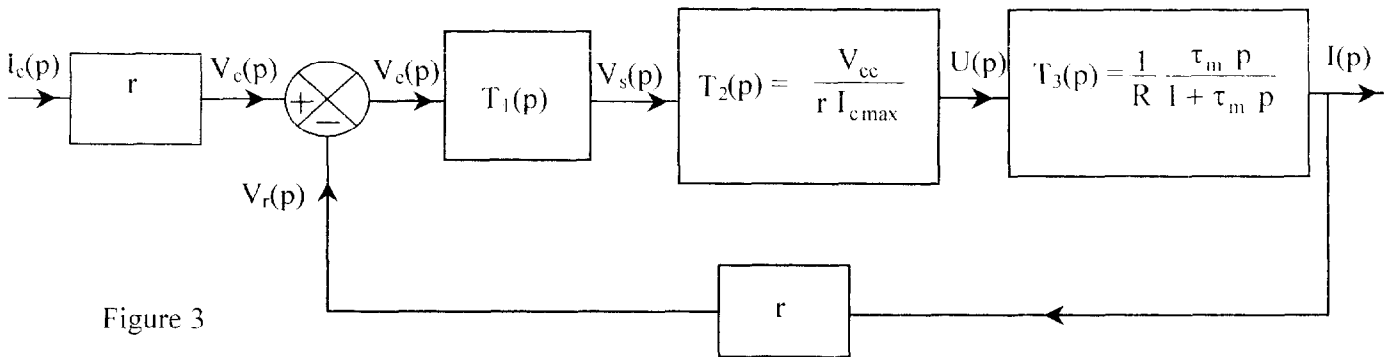


Figure 3

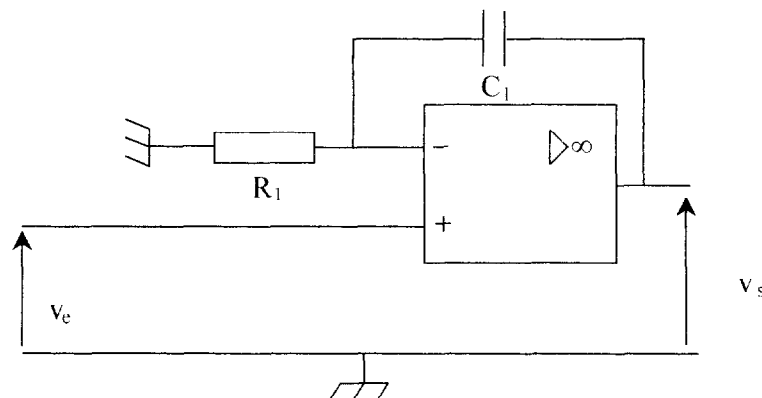


Figure 4

**2.1. Calcul de la transmittance**  $W(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$

**2.1.1.** Pour le correcteur, on adopte la structure de la figure 4. Calculer  $T_1(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$ .

**2.1.2** Quelle valeur doit-on donner à la constante  $\tau_1 = R_1 C_1$  du correcteur si l'on veut que le schéma fonctionnel de la figure 5, équivalent à celui de la figure 3, se réduise à celui de la figure 6 où  $K$  est une constante que l'on calculera en fonction de  $V_{cc}$ ,  $R$  et  $I_{cmax}$ . Compléter la figure 6.

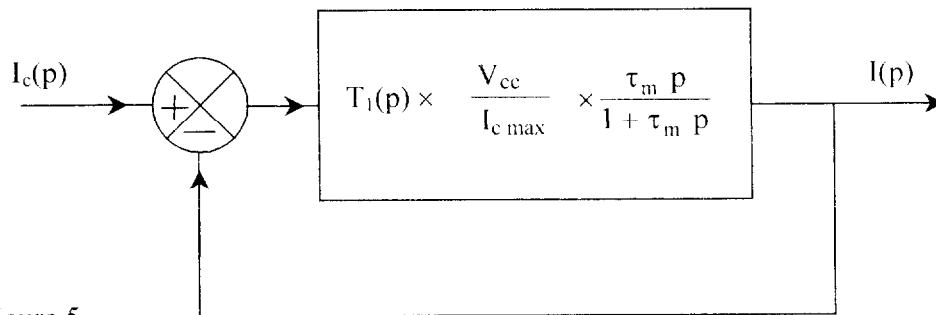


Figure 5

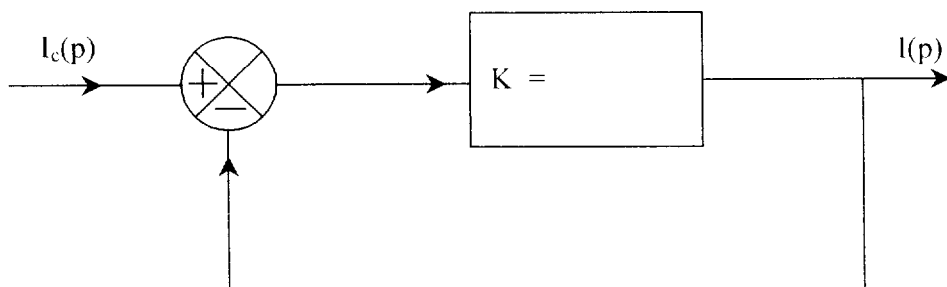


Figure 6

**2.1.3.** Ces conditions étant réalisées, calculer  $C_1$  si  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$  et  $\tau_m = 25 \text{ ms}$ .

2.1.4. Calculer alors la transmittance en boucle fermée  $W(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$  en fonction de K.

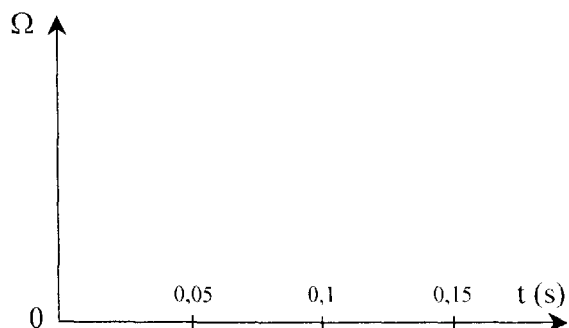
2.1.5. AN :  $V_{cc} = 60 \text{ V}$  ;  $R = 2,5 \Omega$  et  $I_{cmax} = 4,8 \text{ A}$ .  
Quelle est la relation simple obtenue entre  $i(t)$  et  $i_c(t)$  ?

## 2.2. Mise en vitesse du moteur

2.2.1. On donne  $W(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{5}{6} = C^{te}$  et on applique à l'entrée de la boucle représentée figure 3 un échelon de consigne  $i_c(t)$  de 5,76 ampères alors que la vitesse angulaire initiale  $\Omega(0)$  est nulle. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique pour les solides en rotation autour d'un axe, calculer  $\Omega(t)$ .

Rappels :  $k = 0,2 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$  ;  $J = 4,0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  ;  $\frac{\text{a}}{\text{p}^2} \xrightarrow{\text{TL}^{-1}} \text{a t}$ .

2.2.2. Tracer le graphe de  $\Omega(t)$  pour  $0 \leq t \leq 0,15 \text{ s}$ .  
Quel est le temps nécessaire pour obtenir une vitesse angulaire de  $240 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ?



### 3. ETUDE DE L'ASSERVISSEMENT DE VITESSE

Cette étude concerne une phase de travail de la machine lorsqu'elle effectue une coupe. Pour asservir la vitesse du moteur, on fixe sur son axe une génératrice tachymétrique de f.e.m.  $e_g(t) = k_g \Omega(t)$ . Cette f.e.m.  $e_g(t)$  est comparée à une tension de commande  $u_c(t)$ , image de la vitesse désirée  $\Omega_c(t)$ .

La fraise du chariot porte-outil étant au travail, l'effort de coupe se traduit par l'apparition sur l'axe moteur d'un couple résistant de type visqueux, c'est-à-dire proportionnel à  $\Omega$ , tel que  $C_r(t) = f \Omega(t)$ ,  $f$  étant le coefficient de frottement visqueux égal à  $4,0 \times 10^{-3} \text{ N.m.s.rad}^{-1}$ .

L'apparition de ce couple de frottements modifie la transmittance  $T_3(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$ .

Cependant, à l'aide d'un correcteur approprié, on parvient, lors du fonctionnement en charge du moteur, à obtenir l'égalité  $i(t) = a i_c(t)$ ; la transmittance  $W(p) = \frac{I(p)}{I_c(p)}$  est donc

réelle et telle que  $W(p) = a$ , avec  $a = 0,50$ . Contrairement à ce qui a été supposé dans la partie 2, la relation  $i(t) = a i_c(t)$  n'est donc pas assurée pendant la phase de mise en route de la machine, mais pendant la phase de travail (le courant  $i$  reste cependant convenablement maîtrisé lorsque le moteur fonctionne "à vide").

Le système peut donc se décrire à l'aide du schéma fonctionnel de la figure 7 dans lequel  $T_5(p)$  est la transmittance d'un correcteur,  $r = 0,25 \Omega$  est la résistance d'exploration du courant  $i(t)$  traversant le moteur,  $k_g$  la constante de force électromotrice de la génératrice tachymétrique avec  $k_g = 8,0 \times 10^{-2} \text{ V.s.rad}^{-1}$  et  $T_6(p) = \frac{\Omega(p)}{I(p)}$ .

$U_c(p)$  est la transformée de Laplace de la tension de commande  $u_c(t)$ .

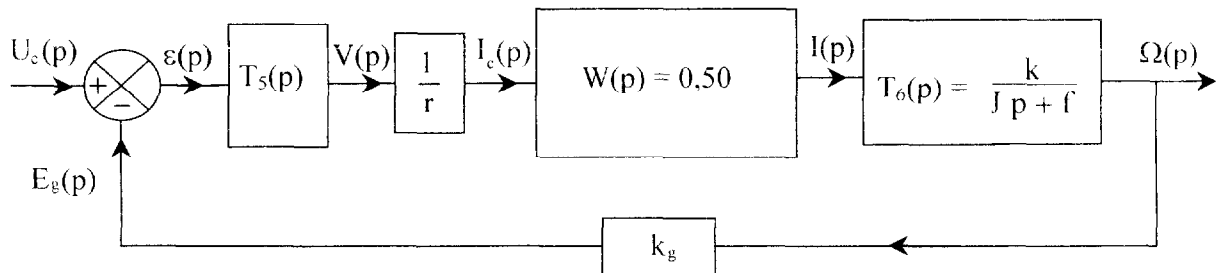


Figure 7

#### 3.1. Simplification du schéma fonctionnel

3.1.1. Justifiez l'expression de la transmittance  $T_6(p) = \frac{\Omega(p)}{I(p)} = \frac{k}{Jp + f}$ .

3.1.2. AN :  $k = 2,0 \times 10^{-1} \text{ V.s. rad}^{-1}$ ;  $f = 4,0 \times 10^{-3} \text{ N.m.s. rad}^{-1}$ ;  $r = 0,25 \Omega$  et  $J = 4,0 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2$ .

Calculer  $T_6(p)$  et la mettre sous la forme  $\frac{T_0}{1 + \tau p}$ . Donner les valeurs de  $T_0$  et de  $\tau$ .



### 3.2. Introduction d'un correcteur

En l'absence d'un correcteur, le courant de consigne  $i_c(t)$  pourrait être beaucoup trop élevé.

**3.2.1.** On réalise un correcteur de transmittance  $T_5(p) = \frac{V(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{8} \frac{1 + \tau p}{\tau p}$  où  $\tau$  a la valeur définie en 3.1.2. Proposer une structure permettant d'obtenir ce résultat.

**3.2.2.** En utilisant le résultat de la question 3.1.2. et l'expression de  $T_5(p)$ , réduire le schéma fonctionnel de la figure 7 à celui de la figure 8. Calculer **numériquement**  $T_7(p)$ .

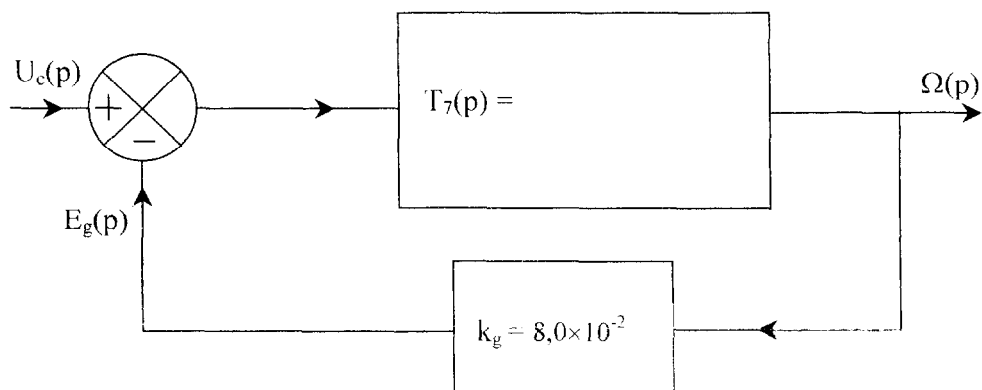


Figure 8

**3.2.3.** Calculer **numériquement** la fonction de transfert corrigée en boucle fermée

$$T_c(p) = \frac{\Omega(p)}{U_c(p)} \text{ et la mettre sous la forme } \frac{T_{co}}{1 + \tau_c p}.$$

**3.2.4.** A partir de ce résultat et de celui de la question 3.1.2. donnant  $T_6(p) = \frac{\Omega(p)}{I(p)}$ ,

montrer que le rapport  $\frac{I(p)}{U_c(p)}$  est constant et calculer sa valeur.

**3.2.5.** Soit  $u_c(t)$  un échelon de tension d'amplitude 19,2 volts. Déterminer la valeur de  $i(t)$  pour  $t > 0$ .

**3.2.6.** Avec cette même entrée  $u_c(t)$ , déterminer  $\Omega(\infty)$ ; caractériser l'erreur en régime permanent correspondante.

**3.2.7.** Quelle est, en régime permanent, la tension aux bornes du moteur ?

## 4. MESURE DE LA VALEUR EFFICACE DU COURANT ABSORBE PAR LE MOTEUR A L'AIDE DE MULTIPLIEURS

Les cartes d'asservissement de vitesse des différents moteurs possèdent une fonction permettant de surveiller la valeur efficace du courant absorbé par ceux-ci. Cette partie porte sur l'analyse du fonctionnement et la mise en équation d'une solution utilisant les caractéristiques des transistors bipolaires dans un circuit à base de multiplieurs.

Pour les transistors, on supposera que le coefficient d'amplification en courant est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que les courants de collecteur  $i_c$  et d'émetteur  $i_e$  sont égaux et de valeur commune notée  $i$ .

On rappelle que le courant d'émetteur  $i$  d'un transistor bipolaire est lié à la tension  $V_{be}$  par les relations réciproques :

$$i = I_s \exp\left(\frac{V_{be}}{V_T}\right) \quad \Leftrightarrow \quad V_{be} = V_T \ln\left(\frac{i}{I_s}\right)$$

Dans ces expressions,  $I_s$  et  $V_T$  représentent respectivement le courant de saturation et la tension thermodynamique de la jonction base émetteur :  $V_T = \frac{k_B T}{e}$ , avec :

$k_B$  (constante de Boltzman) =  $1,38 \times 10^{-23}$  J. K<sup>-1</sup> ;  $e$  (charge élémentaire) =  $1,6 \times 10^{-19}$  C :

$T$  est la température absolue en kelvins (K).

### 4.1. Etude d'un amplificateur différentiel (figure 9).

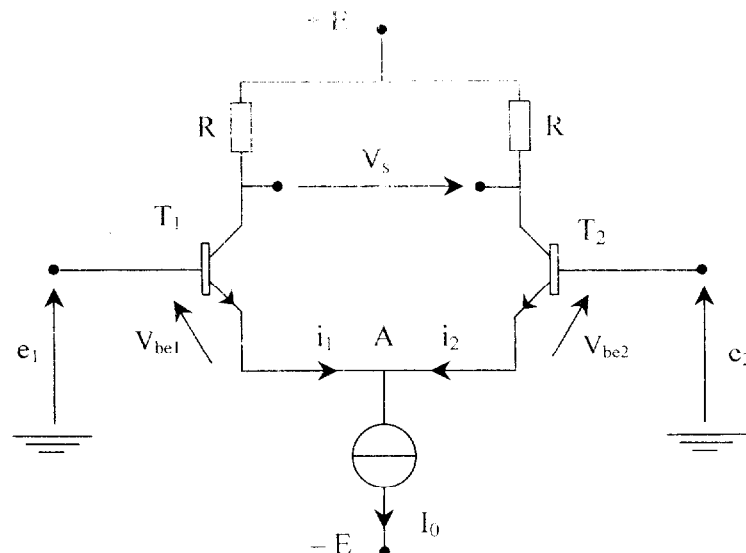


Figure 9

**4.1.1.** Calculer la valeur de  $V_T$  pour une température absolue  $T = 300$  K.  
Dans la suite du problème on prendra  $V_T = 25$  mV.

**4.1.2.** En utilisant les relations données précédemment, donner les expressions littérales de  $i_1 = f(V_{be1})$  et de  $i_2 = f(V_{be2})$ .

**4.1.3.** En écrivant les lois des nœuds et des mailles, exprimer la somme  $i_1 + i_2$  en fonction de  $I_0$  et la différence  $V_{be1} - V_{be2}$  en fonction de  $(e_1 - e_2)$ .

**4.1.4.** En déduire l'expression du rapport  $\frac{i_1}{i_2}$  en fonction de  $V_T$  et de  $(e_1 - e_2)$  puis de la variable  $x = \frac{e_1 - e_2}{V_T}$ .

**4.1.5.** Combiner les résultats des 2 questions précédentes et donner l'expression de  $i_1$  en fonction de  $I_0$  et  $e^{-x}$  et celle de  $i_2$  en fonction de  $I_0$  et de  $e^x$ .

**4.1.6.** En déduire que la différence  $(i_1 - i_2)$  peut se mettre sous la forme :

$$i_1 - i_2 = \frac{I_0(e^x - e^{-x})}{2 + e^x + e^{-x}}.$$

**4.1.7.** On rappelle l'égalité :  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ .

En utilisant ce développement de  $e^x$  à l'ordre 1, montrer que :  $(i_1 - i_2) \approx I_0 \frac{x}{2}$ .

**4.1.8.** Donner l'expression de la tension différentielle de sortie  $V_s$  en fonction de  $R$ ,  $i_1$  et  $i_2$ .

**4.1.9.** Le courant  $I_0$  dépend d'une tension de commande notée  $u$  ( $I_0 = g u$  avec  $g > 0$ ). En utilisant les résultats des questions 4.1.7 et 4.1.8, montrer que la tension de sortie  $V_s$  peut s'écrire  $V_s = K (e_1 - e_2) u$ . Donner l'expression littérale de  $K$  en fonction de  $R$ ,  $V_T$  et  $g$  et calculer sa valeur numérique sachant que  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ ,  $g = 1,0 \times 10^{-3} \text{ A.V}^{-1}$ . Préciser son unité.

**4.1.10.** En négligeant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans l'expression de  $e^x$  on commet une erreur. En supposant que cette erreur est due essentiellement au premier terme du développement de  $e^x$  que l'on néglige, déterminer la valeur maximale de  $x$  permettant de confondre  $e^x$  et  $1 + x$  avec une erreur maximale de 1 %. En déduire la valeur numérique de  $(e_1 - e_2)$  correspondante, en millivolts.

**4.1.11.** En justifiant clairement vos réponses, citer les inconvénients que présente ce montage vis à vis de l'amplitude et de la polarité des signaux qu'il peut traiter.

#### 4. 2. Obtention de la valeur efficace d'un signal à l'aide de multiplieurs

On suppose dorénavant que les imperfections du montage précédent sont corrigées : le multiplieur  $M_1$  de la figure 10a, d'entrées  $v_1$  et  $v_2$ , délivre une tension de sortie  $s = K v_1 v_2$  avec  $K = 1 \text{ V}^{-1}$  (valeur supposée parfaitement réalisée).

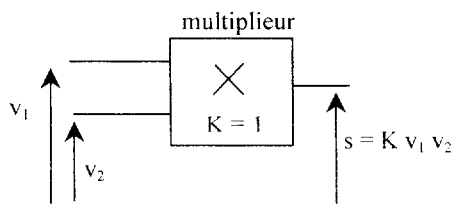


Figure 10 a

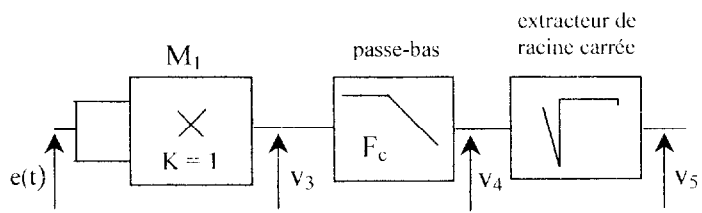


Figure 10 b

Rappels : Les valeurs efficace et moyenne d'une tension  $v(t)$  sur un intervalle de temps  $T$  sont notées respectivement  $V_{\text{eff}}$  et  $\langle v \rangle$ . Ces valeurs sont données par les formules :

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T v^2(t) dt} = \sqrt{\langle v^2(t) \rangle} \quad \text{et} \quad \langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_T v(t) dt.$$

de plus,  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .

**4.2.1.** En utilisant la formule de la valeur efficace et les propriétés des sous ensembles du schéma fonctionnel du montage de la figure 10 b, dans lequel le filtre passe bas donne, sans atténuation, la valeur moyenne de  $v_3$ , montrer que la tension de sortie de ce montage est égale à la valeur efficace du signal d'entrée  $e(t)$ .

**4.2.2.** Le signal  $e(t)$  a pour expression :  $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega_0 t)$  et pour fréquence  $F_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  ;

préciser la fréquence des composantes spectrales de  $v_3(t)$  et leurs amplitudes respectives. Sachant que le filtre passe bas est d'ordre 1, quelle doit être la valeur de sa fréquence de coupure  $F_c$  (exprimée en fonction de  $F_0$ ) pour que l'amplitude de l'ondulation résiduelle de  $v_4(t)$  soit au plus égale à 1% de la valeur moyenne de  $v_3(t)$  ?

4.2.3. On considère le montage représenté figure 11 dans lequel l'amplificateur opérationnel est supposé parfait et le multiplieur  $M_2$  est identique à  $M_1$  ( $K = 1 \text{ V}^{-1}$ ). Donner l'expression du courant  $i$  en fonction de  $R$  et de  $v'_4$  puis de  $v_s$  et de  $R$ . En déduire la relation liant  $v_s$  à  $v'_4$ . Préciser la polarité de  $v'_4$  pour que ce montage fonctionne correctement.

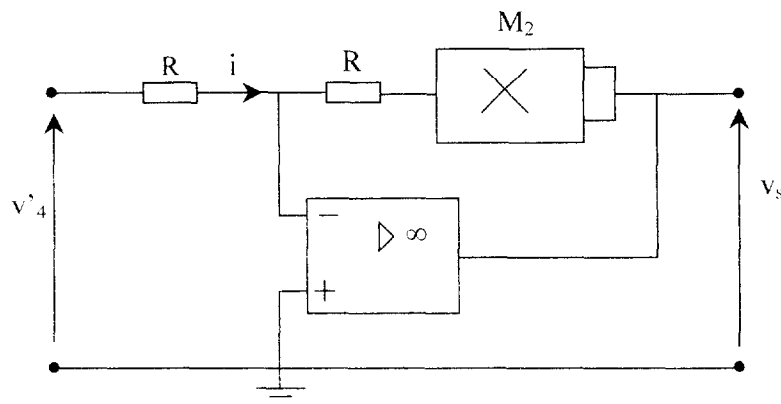


Figure 11

4.2.4. Quel type d'étage faut-il prévoir, en amont du montage de la figure 11, pour réaliser l'extracteur de racine carrée de la figure 10 b où  $v_s = \sqrt{v_4}$  ? Proposer un schéma de réalisation utilisant un amplificateur opérationnel et des résistances pour cet étage.