BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

COMPTABILITE - GESTION

Epreuve de MATHEMATIQUES

Durée : 2 heures **Coefficient 2**

- La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage des instruments de calcul est autorisé (conditions fixées par la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n°42).
- Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
- Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1

Les parties **A** et **B** peuvent être traitées de manière indépendante.

Une entreprise de loisirs qui possède 60 bateaux les loue à la semaine.
Cet exercice propose une étude de la rentabilité de cette activité pour une semaine fixée.

Les données financières sont exprimées en milliers de francs (kF) et les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie A : Etude du coût de fonctionnement hebdomadaire

Le coût de fonctionnement hebdomadaire $C(q)$, exprimé en milliers de francs, correspondant à la location d'un nombre q de bateaux est donné par :

$$C(q) = 15 + 2q - 20\ln(0{,}1\,q + 1).$$

1) **a)** Calculer $C(10)$ et $C(20)$. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de bateaux loués ?

b) Déterminer le pourcentage d'augmentation du coût de fonctionnement hebdomadaire lorsque le nombre de bateaux loués passe de 10 à 20.

2) Afin d'étudier le coût de fonctionnement hebdomadaire, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par :

$$f(x) = 15 + 2x - 20\ln(0{,}1\,x + 1).$$

a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{0{,}2\,x}{0{,}1\,x + 1}$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;60]$. En déduire le sens de variation de f.

b) Calculer le coût de fonctionnement hebdomadaire maximal (exprimé en milliers de francs).

Partie B : Etude du bénéfice

Chaque bateau est loué 3000 F la semaine. Le bilan financier hebdomadaire $B(q)$, exprimé en milliers de francs, correspondant à la location d'un nombre q de bateaux est donc donné par :

$$B(q) = q + 20\ln(0{,}1\,q + 1) - 15.$$

1) Afin d'étudier ce bilan, on considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par :

$$g(x) = x + 20\ln(0{,}1\,x + 1) - 15.$$

Déterminer le sens de variation de la fonction g.

2) Sur l'annexe jointe au sujet :

a) Compléter le tableau de valeurs de la fonction g.

b) Construire la représentation graphique C de la fonction g dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 3 cm pour 10 bateaux sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 5 kF sur l'axe des ordonnées.

3) Déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, le nombre minimum de bateaux que l'entreprise doit louer pendant cette semaine pour obtenir :

a) Un bénéfice (positif),

b) Un bénéfice supérieur à 20 kF.

EXERCICE 2

Dans ce problème, on s'intéresse à une production de pots de confiture dans une usine.

Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A

On s'intéresse, dans cette partie, à la masse des pots produits.
On considère l'événement : « un pot a une masse inférieure à 490 grammes ».
Une étude a permis d'admettre que la probabilité de cet événement est 0,2.

1) On prélève au hasard 10 pots dans la production totale. On suppose que le nombre de pots est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pots.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale.
En préciser les paramètres.

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « parmi les 10 pots, il y a exactement 2 pots dont la masse est inférieure à 490 grammes ».

2) On prélève au hasard 100 pots dans la production totale. On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 pots, associe le nombre de pots dont la masse est inférieure à 490 grammes.
On admet que la loi de la variable aléatoire Y peut être approchée par une loi normale.
Soit Z une variable aléatoire suivant cette loi normale.

a) Expliquer pourquoi les paramètres de la loi de Z sont 20 et 4.

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « parmi les 100 pots, il y a au plus 18 pots dont la masse est inférieure à 490 grammes », c'est à dire calculer $P(Z \leq 18{,}5)$.

c) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(Z \leq n) > 0{,}80$.

Partie B

1) Les masses, exprimées en grammes, observées pour un échantillon de 100 pots pris au hasard et avec remise dans la production totale, ont donné les résultats suivants :

Masse en grammes	[470 ; 480[	[480 ; 490[	[490 ; 500[	[500 ; 510[	[510 ; 520[
Nombre de pots	7	13	43	27	10

a) On considère que les éléments de chaque classe sont situés en son centre. Dans cette situation, calculer la moyenne et une valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart type de cet échantillon.
On utilisera les fonctions statistiques de la calculatrice.

b) A partir des informations précédentes, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type s de la production totale (pour cette dernière, on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).

2) Le fabricant fait régler sa machine pour que la masse des pots produits soit 505 grammes.
Soit S la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pots prélevés au hasard et avec remise dans la production totale, associe la moyenne des masses des 100 pots de cet échantillon.

On admet que S suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\frac{s}{10}$.

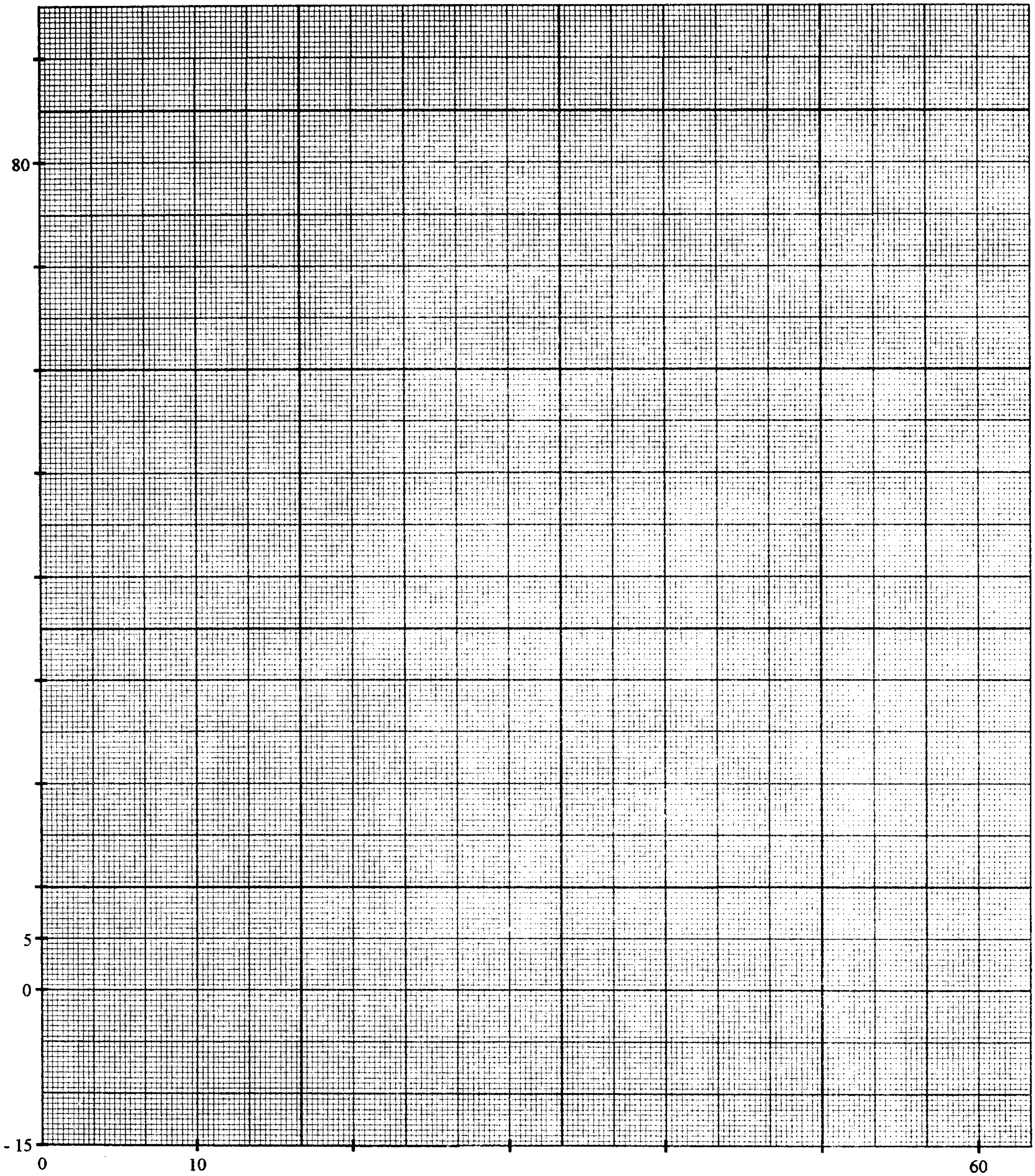
On se propose de construire un test bilatéral permettant de vérifier, au seuil de signification 5 %, l'hypothèse selon laquelle la machine est correctement réglée.
On choisit comme hypothèse nulle $H_0 : \mu = 505$ et comme hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 505$.

a) Déterminer la région critique au seuil de signification 5 %.

b) Enoncer la règle de décision.

c) Utiliser le test avec l'échantillon de la question **B-1)**.
Conclure.

ANNEXE



x	0	5	10	20	30	40	60
$g(x)$	-15			26,97			

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
B.T.S. COMPTABILITE ET GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$y' = ay$	$f(t) = ke^{at}$

3. *PROBABILITES :*

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

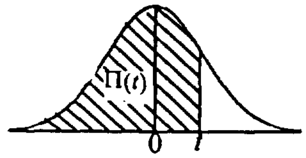
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$