BTS INFORMATIQUE DE GESTION **SESSION 2001**

E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE N° 1 (4 points)

Un règlement administratif concerne les trois catégories d'individus suivantes :

- *les hommes de moins de 50 ans ;*
- *les non-salariés ayant 50 ou plus de 50 ans ;*
- *les femmes qui sont - soit salariées ;*
  - soit non salariées et qui ont moins de 50 ans.

On définit quatre variables booléennes h, a, s, r ainsi :

x désignant un individu quelconque,

$h = 1$ *si x est un homme* ($h = 0$ *sinon*) ;
$a = 1$ *si x est âgé (e) de 50 ou plus de 50 ans* ($a = 0$ *sinon*) ;
$s = 1$ *si x est salarié (e)* ($s = 0$ *sinon*) ;
$r = 1$ *si x est concerné (e) par le règlement* ($r = 0$ *sinon*) .

1) Quels sont les individus x pour lesquels on a $h.\overline{a} = 1$?

2) On admet que $r = h.\overline{a} + \overline{s}.a + \overline{h}.(s+\overline{s}.\overline{a})$.

   a) Représenter r par une table de Karnaugh (ou une table de vérité).
   b) En déduire une expression simplifiée de r.
   c) Quelle est la catégorie d'individus <u>non concernés</u> par le règlement ?

3) En utilisant uniquement le calcul booléen, montrer que

$$h.\overline{a} + \overline{s}.a + \overline{h}.(s+\overline{s}.\overline{a}) = \overline{a}+\overline{s}+\overline{h}.$$

(On pourra utiliser les propriétés suivantes, vérifiées par deux variables booléennes y et z :
$y + y.z = y$ et $y + \overline{y}.z = y + z$).

EXERCICE N° 2 (7 points)

La société TOPGAMES a lancé fin décembre 1999 un nouveau jeu sur console.
Le nombre de jeux vendus au cours des 12 mois de l'an 2000 a fait l'objet d'une statistique dont voici un extrait (le mois 1 est janvier 2000) :

mois	1	2	3	4	----------	10	11	12
nombre de jeux vendus (milliers)	10	19	25	30	----------	57	60	61

La société sait par expérience que, pour ce genre de jeu, les ventes croissent pendant une certaine période pour atteindre un maximum, puis chutent plus ou moins rapidement, les consommateurs attendant alors la nouvelle version du jeu ou un autre jeu.

Les *précédents lancements ont montré que le nombre de jeux* (en milliers) *vendus chaque mois, peut être modélisé par une fonction* V *du type* :

$$V(x) = x\left(A - B\sqrt{x}\right).$$

où A et B sont deux constantes réelles et où x désigne la date exprimée en mois ($x = 1$ représentant janvier 2000).

Partie A

Détermination du modèle.

Calculer les deux constantes A et B à 10^{-3} près si on impose à la fonction V de coïncider avec la statistique aux deux mois extrêmes, c'est à dire :

$$V(1) = 10 \qquad \text{et} \qquad V(12) = 61.$$

(On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2} près des deux constantes cherchées).

Partie B

Étude du modèle.

On choisit le modèle, où la fonction V est définie, pour tout nombre réel $x \geq 1$, par

$$V(x) = 2x\left(6 - \sqrt{x}\right).$$

1) Résoudre l'équation $V(x) = 0$.
2) Calculer $V'(x)$ et montrer que : $V'(x) = 3\left(4 - \sqrt{x}\right)$.
   En déduire le tableau de variation de V.

3) Recopier et compléter le tableau de valeurs (arrondies à l'entier le plus proche) :

x	1	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$V(x)$	10									

Tracer la courbe représentative de la fonction V, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, pour les abscisses appartenant à l'intervalle [1 ; 36], en prenant pour unités :
1 cm pour 2 mois sur l'axe des abscisses,
1 cm pour 10 milliers de jeux sur l'axe des ordonnées.

On utilisera pour ce tracé le format paysage.

Partie C

Utilisation du modèle.

On admet que le modèle de la partie B est utilisable depuis le début de l'année 2000 jusqu'à fin 2002.

1) A quel mois de quelle année le nombre de jeux vendus sera t-il maximal ?
   Combien de jeux seront-ils vendus ce mois-là ?

2) *La société décide d'arrêter la fabrication du jeu le mois pour lequel le nombre de jeux vendus descendra en dessous de 10 000.*

   Déterminer graphiquement à quelle date (donner le mois et l'année) le nombre de jeux vendus deviendra inférieur à 10 000.
   (Faire apparaître les tracés permettant cette détermination).

EXERCICE N° 3 (9 points)

Une compagnie a un contrat d'entretien pour 300 ascenseurs. On admet que, chaque semaine, la probabilité de panne d'un ascenseur est de $\frac{1}{75}$.

On suppose l'indépendance entre les pannes d'un même ascenseur ainsi que de deux ascenseurs différents.

Soit X la variable aléatoire qui, à toute semaine, associe le nombre de pannes du parc complet des ascenseurs.

Partie A. *Étude de X.*

1) Indiquer pourquoi X suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = \frac{1}{75}$.

2) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité pour que lors d'une semaine il y ait (strictement) moins de 2 pannes ?

Partie B. *Approximation de X.*

On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson, de paramètre m*.*
On désigne par Y une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.

1) Indiquer pourquoi m est égal à 4.

2) En utilisant la variable Y, calculer une valeur approchée de la probabilité pour que la compagnie ait à intervenir plus de 6 fois durant une semaine. (On arrondira le résultat à 10^{-3} près).

Partie C. *Sécurité.*

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout adulte, usager d'ascenseurs, choisi au hasard, associe son poids en kg. On suppose que Z suit la loi normale d'espérance mathématique 70 kg et d'écart type 15 kg.

1) Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité pour qu'un adulte, usager d'ascenseurs, choisi au hasard, pèse moins de 90 kg.

Un ascenseur peut supporter 500 kg avant la surcharge. Les normes de sécurité spécifient que la probabilité de surcharge ne doit pas dépasser 0,0001.

On admet que le poids total de n *usagers adultes d'ascenseurs, dont les poids sont indépendants, est une variable aléatoire* S *qui suit la loi normale d'espérance mathématique* $70\,n$ *et d'écart type* $15\sqrt{n}$.

2) Calculer les probabilités de surcharge p_5 lorsqu'il y a 5 adultes dans l'ascenseur et p_6 lorsqu'il y a 6 adultes dans l'ascenseur.
En déduire le nombre maximal de personnes autorisées à emprunter l'ascenseur.

ISDRMAT

Formulaire de mathématiques

B.T.S. INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$;

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)\,!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x'+b(t)\,x=0$	$f(t)=k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t\mapsto\dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. PROBABILITES :

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle** (PROGRAMME FACULTATIF)

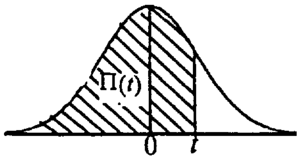
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$