ASSISTANT EN CREATION INDUSTRIELLE

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

<u>EXERCICE 1</u> (8 points)

Un magasin spécialisé dans la vente de téléphones portables fait une promotion sur un type d'appareil A. Dans une journée 150 personnes se présentent indépendamment. La probabilité pour qu'une personne achète l'appareil A est de 0,4. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre d'articles A vendus en une journée.

1.Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
Calculer l'espérance E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approximée par une loi normale de moyenne $m = 60$ et d'écart-type $\sigma = 6$. Calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 72)$, $P(X \geq 69)$ et $P(69 \leq X \leq 72)$.

<u>EXERCICE 2</u> (12 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

1. Déterminer les réels a, b, c, d sachant que $f(0) = \frac{1}{4}$; $f(3) = \frac{7}{4}$; $f'(0) = 0$; $f'(3) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}$

   a. Déterminer la fonction g' dérivée de g sur $\mathbb{R}$.
   b. Etudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau des variations de g (on y précisera, sans démonstration, les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$)
   c. Construire la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction g lorsque x varie dans l'intervalle [0 ; 3]. On utilisera un repère orthonormé d'unité 2 cm. On représentera également les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = 3$.

3. a. Construire la courbe $\mathcal{C}_1$ image de la courbe $\mathcal{C}$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.
   b. Construire les courbes $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}'_1$ symétriques de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.

4. a. Calculer $I = \int_0^3 g(x)dx$
   b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine délimité par : $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}_1$; $\mathcal{C}'$; $\mathcal{C}'_1$ et les droites d'équation $x = 3$ et $x = -3$.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a>0$ et $b>0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin 2t = 2\sin t \cos t$

2. DERIVEES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$

3. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - (\bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}$$

$y = ax+b$, où $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$; $x = a'y+b'$, où $a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

4. PROBABILITES :

a) Loi binomiale :

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \qquad \text{où} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$E(X) = np \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

k \ λ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0.6065	0.5488
1	0.1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0.0536	0,0758	0.0988
3	0.0011	0.0033	0.0071	0,0126	0.0198
4		0,0002	0.0007	0.0015	0.0030
5			0.0001	0.0001	0.0003

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0,135	0.0498	0,018	0,007	0.002	0,001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0,271	0,149	0.073	0,034	0,015	0,006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0,271	0.224	0,147	0,084	0.045	0,022	0,011	0.005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0.224	0,195	0,140	0,089	0,052	0.029	0,015	0.008
4	0,015	0.047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0.057	0,034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0,156	0,176	0,161	0,128	0.092	0.061	0.038
6	0,001	0.004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0.000	0.001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0.000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

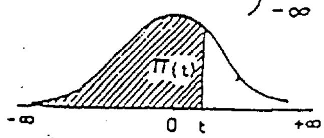
c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$



t	0.00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0.07	0.08	0,09
0.0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0.1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,952 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,985 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1,37$ $\quad \Pi(t = 1,37) = 0,914\,7$
pour $t = -1,37$ $\quad \Pi(t = -1,37) = 0,085\,3$