B.T.S. CHIMISTE

Épreuve : MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures *Coefficient : 3*

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

PROBLEME 1 - (8 points)

Lorsqu'un fil conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. Désignons par $\theta(t)$ la température du conducteur exprimée en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes.
À l'instant de la mise sous tension, choisi comme instant origine ($t = 0$), la température du conducteur est celle du milieu ambiant : $\theta(0) = 18$ (condition initiale).
Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle :

$$(E) \quad \theta'(t) + 10k\,\theta(t) = 2 \;, \qquad t \geq 0$$

dans laquelle k est une constante qui dépend du conducteur et du milieu ambiant.

Partie A :

On suppose, dans cette partie, que le conducteur est parfaitement isolé, c'est-à-dire que $k = 0$.

1. Écrire l'équation différentielle correspondant à $k = 0$ puis résoudre cette équation différentielle.

2. Représenter graphiquement les variations de θ dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm en abscisse pour 2 secondes et 1 cm en ordonnée pour 2 °C.

3. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 30 °C.

Partie B :

On suppose, dans cette partie, que le conducteur n'est pas thermiquement isolé et que $k = 5 \times 10^{-3}$.

1. Vérifier que la température du conducteur s'exprime par : $\theta(t) = 40 - 22\,e^{-0,05\,t}$.

2. a. Calculer la température stationnaire du conducteur : $\theta_e = \lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$.

   Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

   b. Déterminer le développement limité de θ au voisinage de $t = 0$, à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de θ en son point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de $t = 0$.

3. a. Etudier les variations de θ en fonction de t.

   b. Construire la courbe représentative de θ sur le même graphique que dans la partie A.

   c. Calculer la température du conducteur à l'instant $t = 20$.

   d. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 39,99 °C.

PROBLEME 2 - (12 points)

Un laboratoire de chimie est chargé de conditionner des flacons d'eau de toilette destinés à une parfumerie. On définit une variable aléatoire X associant à chaque flacon le volume de son contenu exprimé en cm^3. On suppose que X suit la loi normale de moyenne μ **(inconnue)** et d'écart type $\sigma = 0{,}036$.

Première partie :

Dans cette partie, on prend pour μ la valeur annoncée par le fournisseur : $\mu = 43{,}041$. Le cahier des charges indique que le flacon est conforme lorsque le volume de son contenu appartient à l'intervalle $[42{,}970\ ;\ 43{,}130]$.

On choisit un flacon au hasard dans la production.

1. Déterminer la probabilité pour qu'il soit conforme.
2. Trouver un intervalle centré en μ dans lequel le volume a $85\,\%$ de chances de se trouver.

Deuxième partie :

A l'occasion d'une commande, le parfumeur reçoit du laboratoire un lot de flacons. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la moyenne μ de la production, avec la valeur m = 43,041 annoncée par le fournisseur. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectue un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 75 flacons pris dans le lot reçu.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume	$[42{,}930 ; 42{,}970[$	$[42{,}970 ; 43{,}010[$	$[43{,}010 ; 43{,}050[$	$[43{,}050 ; 43{,}090[$	$[43{,}090 ; 43{,}130]$
Effectif	2	7	39	19	8

1. Calcul de la moyenne.

Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cet échantillon (arrondie à 10^{-3} près) en faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celle du centre de chaque classe.

2. Construction du test.

On oppose l'hypothèse nulle $H_0\ :\ \mu = m$ à l'hypothèse alternative $H_1\ :\ \mu \neq m$.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la moyenne d'échantillonnage $\overline{X}$? En préciser les paramètres.

b. En se plaçant sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} près du réel h tel que : $P(\mu - h \leq \overline{X} \leq \mu + h) = 0{,}95$.

c. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque de $5\,\%$.

d. Énoncer la règle de décision du test.

3. Utilisation du test.

Peut-on affirmer, au seuil de risque de $5\,\%$, que la valeur m annoncée pour μ est correcte ?

BTS CHIMISTE

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

1 – Relations fonctionnelles

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, *où* $a > 0$ *et* $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $ch\, t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, $sh\, t = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$, *où* $a = \alpha + i\beta$

2 – Dérivées et Primitives

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha \, (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha\, t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
$ch\, t$	$sh\, t$
$sh\, t$	$ch\, t$
$Arc \sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$Arc \tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$e^{at} \, (a \in \mathbb{C})$	$a\, e^{at}$

3 – Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^a = 1 + \frac{a}{1!} t + \frac{a(a-1)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

4 – Statistique descriptive

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right) - (\bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y}$$

Droite d'ajustement :

$$y = a\,x + b, \text{ où } \quad a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}}; \qquad x = a'\,y + b', \text{ où } \quad a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{y^2}}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

5 – Probabilités :

a) Loi binomiale :

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad où\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$E(X)=np \qquad \sigma(X)=\sqrt{n\,p\,q}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \qquad E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

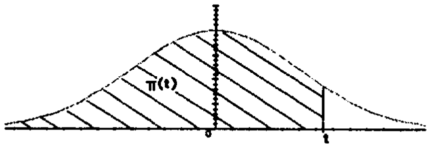
k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917,7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990,6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota. – La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : *Pour* $t = 1{,}37$ — $\pi(t = 1{,}37) = 0{,}914\,7$

Pour $t = -1{,}37$ — $\pi(t = -1{,}37) = 0{,}085\,3$