BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

GÉOMÈTRE-TOPOGRAPHE

session 2002

Épreuve de MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h **Coefficient : 2**

- SUJET -

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

GT MAT

EXERCICE 1 *(11 points)*

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité 5 cm).
On considère les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = 1$ et $x = -1$.
Une droite variable (D), passant par O et de coefficient directeur t, $(t \in \mathbb{R})$, coupe (Δ) en P.
La parallèle à $(O\,;\vec{i})$ passant par P coupe (Δ') en P'.

1°/ Faire une figure qui sera complétée dans les questions suivantes.

2°/ Soit M(x,y) le projeté orthogonal de P' sur la droite (D).

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{P'M}$.

b) En déduire que les coordonnées de M sont données par : $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y = t\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

3°/ On désigne par (C) la courbe définie paramétriquement par : $x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y(t) = t\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

a) En étudiant la parité des fonctions x et y, donner un intervalle d'étude suffisant pour l'étude des variations de x et y et pour le tracé de (C).

b) Vérifier que :

$$x'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{(t^2+2-\sqrt{5})(t^2+2+\sqrt{5})}{(t^2+1)^2}.$$

c) Étudier les variations des fonctions x et y.

d) Déterminer les points d'intersection de (C) avec la droite $(O\,;\vec{i})$ et les équations des tangentes à (C) en ces points.

4°/ Tracer la courbe (C) sur la figure du 1°.

EXERCICE 2 *(9 points)*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Sur la sphère (Σ) de centre O et de rayon 1, on considère les points :

N de coordonnées cartésiennes (0,0,1) S de coordonnées cartésiennes (0,0,−1)

$A\begin{cases}\text{longitude } 90° \text{ Est}\\ \text{latitude } 30° \text{ Sud}\end{cases}$ $B\begin{cases}\text{longitude } 0°\\ \text{latitude } 0°\end{cases}$

Rappels : dans un triangle sphérique (ABC), avec les notations usuelles, on a les relations :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

1°/ a) Faire une figure : placer les points N, S, A et B.

b) Justifier que les coordonnées cartésiennes des points A et B sont respectivement $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ et $(1,0,0)$.

2°/ Déterminer les éléments du triangle sphérique (SAB).

3°/ Soit T l'inversion de pôle N et de puissance 4.

a) Quelle est l'image de la sphère (Σ) par l'inversion T ?

b) Soient A' et B' les images respectives de A et B par l'inversion T.

En utilisant la relation $\overrightarrow{NM'} = \frac{4}{NM^2}\overrightarrow{NM}$, où M' désigne l'image par T d'un point M quelconque, calculer les coordonnées cartésiennes de A' et B'. Placer les points A' et B' sur la figure.

4°/ a) En déduire la distance A'B'.

b) Calculer la différence d entre la distance A'B' et la longueur du petit arc de grand cercle d'extrémités A et B.

5°/ La Terre est assimilée à la sphère (Σ), dont on exprime maintenant le rayon en kilomètres, en prenant R = 6380 km.

Exprimer la différence d en kilomètres, arrondie au km près.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$, où $a>0$ et $b>0$

$\exp(a+b)=\exp a \times \exp b$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$\cos 2t=2\cos^2 t-1=1-2\sin^2 t$

$\sin 2t=2\sin t\cos t$

$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

$e^{it}=\cos t+i\sin t$

$\cos t=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$, $\operatorname{ch} t=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})$

$\sin t=\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})$, $\operatorname{sh} t=\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})$

$e^{at}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$, où $a=\alpha+i\beta$

2. DERIVEES ET PRIMITIVES :

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha (\alpha\in\mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t$
$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$e^{at} (a\in\mathbb{C})$	ae^{at}

3. DEVELOPPEMENTS LIMITES :

$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)$

$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\dots+(-1)^n t^n+t^n\varepsilon(t)$

$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$

$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\dots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$

$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\dots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$

$(1+t)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\varepsilon(t)$

GT MAT

4. STATISTIQUE DESCRIPTIVE :

a) Moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i$$

b) Variance et écart-type :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - (\bar{x})^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

c) Ajustement affine par la méthode des moindres carrés :

Covariance:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$y = ax + b \text{ , où } a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad ; \quad x = a'y + b' \text{ , où } a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

d) Corrélation linéaire :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \ \sigma_y}$$

5. PROBABILITES :

a) Loi binomiale:

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \qquad \text{où} \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$E(X) = np \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

b) Loi de Poisson :

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \qquad E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

k \ λ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.1637	0.2222	0.2681	0.3032	0.3293
2	0.0163	0.0333	0.0536	0.0758	0.0989
3	0.0011	0.0033	0.0071	0.0126	0.0198
4		0.0002	0.0007	0.0015	0.0030
5			0.0001	0.0001	0.0003

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0.223	0,135	0,0498	0,018	0,007	0,002	0,001	0.000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0.003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,000	0,002	0,006	0,013
18									0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,000	0,002
21											0,001
22											0,000

c) Loi normale :

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\pi(t)=P(X\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Note. — La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1{,}37$ $\quad \Pi(t = 1{,}37) = 0{,}914\,7$
pour $t = -1{,}37$ $\quad \Pi(t = -1{,}37) = 0{,}085\,3$