ISDRMAT

BTS INFORMATIQUE DE GESTION SESSION 2002

E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet.

EXERCICE N° 1 (4 points)

Une usine fabrique 3 sortes d'articles : a_1, a_2, a_3, à partir de 3 modules : m_1, m_2, m_3.
On donne :

articles

a_1	a_2	a_3	modules
3	9	5	m_1
4	0	9	m_2
4	8	6	m_3

modules

m_1	m_2	m_3	
5	6	3	Poids unitaires (kg)
180	250	150	Coûts unitaires (en euros)

On lit par exemple :

Pour fabriquer un article a_2, il faut 9 modules m_1 et 8 modules m_3.
Un module m_1 pèse 5 kg et coûte 180 euros.

On note :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{bmatrix}$$

1) a) Calculer le produit matriciel $M \times A$.
b) Interpréter les lignes de ce produit.

2) Une semaine donnée, l'usine doit fournir 8 articles a_1, 12 articles a_2, 13 articles a_3.
Elle dispose en début de semaine d'un stock de 200 modules de chaque sorte.

On note F la matrice : $F = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $A \times F$? Que représente-t-il ?
b) La demande [8 articles a_1, 12 articles a_2, 13 articles a_3] peut-elle être satisfaite ?

EXERCICE N° 2

(8 points)

Toutes les probabilités demandées dans cette exercice seront données sous leur forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

La partie C peut être traitée indépendamment des deux autres.

Une entreprise vend 2 types de meubles : M_1, M_2 respectivement 419 euros et 509 euros l'unité.

La demande mensuelle en meubles M_1 est :
une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(85 ; 15)$.
La demande mensuelle en meubles M_2 est :
une variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(52 ; 8)$.

On suppose que X et Y sont indépendantes.

Partie A

Dans cette question, on suppose que le stock est suffisant pour satisfaire la demande.
Ainsi, l'entreprise vend mensuellement X meubles M_1 et Y meubles M_2.

Calculer les probabilités (un mois donné) d'avoir les évènements suivants :

V_1 : on vendra au plus 80 meubles M_1.

V_2 : on vendra au plus 70 meubles M_2.

Partie B

Dans cette question, le stock n'est pas obligatoirement suffisant pour satisfaire la demande. L'entreprise dispose en début de mois d'un stock de 80 meubles M_1 et 70 meubles M_2.

Quelles sont les probabilités des évènements suivants :

S1 : il y aura rupture de stock en meubles M_1.
S2 : il y aura rupture de stock en meubles M_2.
S : il y aura rupture de stock (en meubles M_1 ou M_2).

(La rupture de stock concerne la fin du mois, et signifie que la demande est supérieure au stock).

Partie C

Un mois donné est dit rentable si le chiffre d'affaires de ce mois dépasse 70 000 euros.

1) Exprimer (en euros) le chiffre d'affaires Z du mois en fonction de X et Y.

2) Calculer l'espérance mathématique de Z.

3) *On admet que Z suit la loi normale* $\mathcal{N}(62083 ; 7400)$.
Quelle est la probabilité qu'un mois donné soit rentable ?

4) On note R le nombre de mois rentables d'un semestre, et on suppose l'indépendance entre les évènements « rentable ou non rentable » des mois successifs.
Justifier le résultat suivant : R suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6 ; 0{,}142)$.

5) Quelle est la probabilité que sur les 6 mois d'un semestre, on en ait au moins deux rentables ?

EXERCICE N° 3 **(8 points)**

Un calcul doit être effectué un grand nombre de fois avec des données différentes. Il peut être réalisé à l'aide d'une configuration comprenant plusieurs processeurs travaillant simultanément, et d'un logiciel adéquat pilotant ces processeurs.
Matériellement, on peut installer jusqu'à 256 processeurs.
Le temps d'exécution T d'un calcul (en secondes) est donné en fonction du nombre entier p de processeurs installés par :

$$T(p) = \frac{1}{200} + \frac{1+\ln(p)}{p^2}$$, ln désignant le logarithme népérien.

Le coût (matériel + logiciel) de la configuration est proportionnel au nombre de processeurs installés. On désire choisir p pour que le temps de calcul et le coût soient faibles, et pour cela, on définit l'indice I égal au produit du nombre de processeurs par le temps de calcul :

$$I(p) = p \times T(p) = p\left(\frac{1}{200} + \frac{1+\ln(p)}{p^2}\right).$$

On cherchera donc à avoir une configuration pour laquelle I est minimal.

Partie A

Étude du temps de calcul.
Soit t la fonction de la variable x, définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$t(x) = \frac{1}{200} + \frac{1+\ln(x)}{x^2}.$$

1) Calculer la dérivée $t'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction t.

2) Calculer la limite de t en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

3) Calculer, à 10^{-6} près, $t(72)$, $t(73)$. Combien faut-il installer de processeurs pour que le temps de calcul soit inférieur à 0,006 secondes ?

Partie B

Étude de l'indice.

Soit f la fonction de la variable x, définie sur l'intervalle [1 ; 256] par :

$$f(x)=x\left(\frac{1}{200}+\frac{1+\ln(x)}{x^2}\right).$$

On définit l'indice moyen de f par $m=\dfrac{1}{255}\displaystyle\int_1^{256} f(x)\,\mathrm{d}x$.

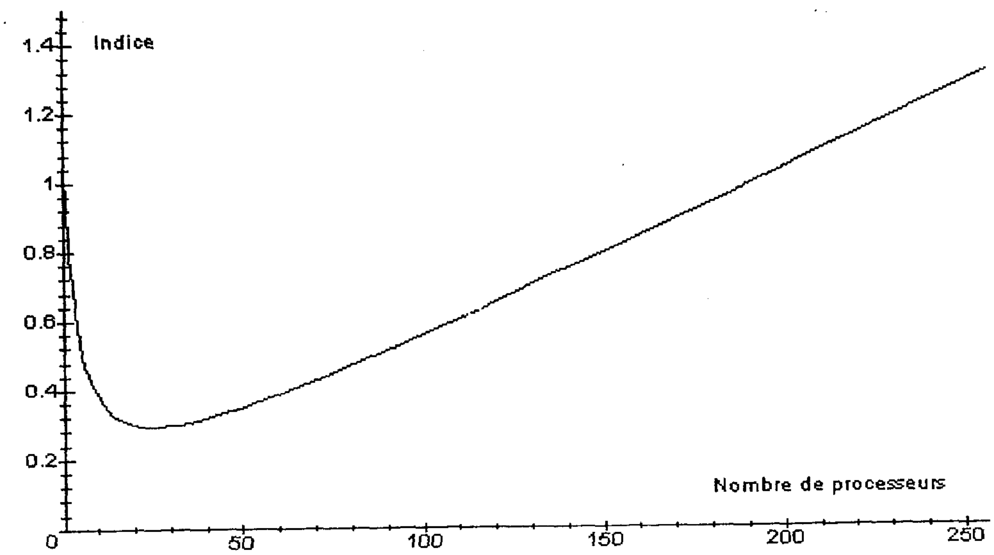
1) Vérifier que la fonction G définie sur l'intervalle [1 ; 256] par

$$G(x)=\frac{(1+\ln(x))^2}{2}$$

est une primitive de la fonction g, définie sur le même intervalle, par : $g(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

2) En déduire une primitive F de f puis l'indice moyen m à 10^{-2} près.

3) En vous aidant du graphique ci-dessous (courbe représentative de f), puis d'une calculatrice, et en remarquant que $I(p)=f(p)$, déterminer précisément le nombre p de processeurs à installer pour que l'indice soit minimal.



Formulaire de mathématiques

B.T.S. INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$;

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} \mathrm{e}^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha\, u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\ ,\ b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\,\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES :*

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X) = np$ $\qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

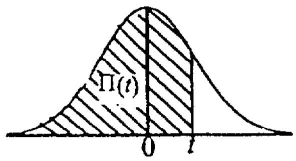
Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$ $\qquad E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\qquad \sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

c) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$