Les calculatrices sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - x^2 e^{-x}.$$

On note C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie A - Etude de fonction.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que C admet une asymptote D dont on donnera une équation.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule α sur l'intervalle $[-1, 0]$. Donner, en la justifiant, la valeur de α arrondie au centième.
4. Tracer la droite D et la courbe C en précisant les tangentes horizontales de celle-ci. On rappelle l'unité graphique : 2 cm.

Partie B - Calcul d'aire.

1. Vérifier que $1 - f(x) \geq 0$ pour tout nombre réel x.
2. Soit λ un nombre réel strictement positif.

   Montrer que $\int_0^{\lambda} x^2 e^{-x} dx = e^{-\lambda}(-\lambda^2 - 2\lambda - 2) + 2$ (on pourra effectuer deux intégrations par parties).
3. En déduire l'aire $A(\lambda)$, en cm², de la partie du plan limitée par la courbe C, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.
4. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 (10 points).

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés T_1 et T_2.

Partie A.

On prélève au hasard une lentille dans la production.

On désigne par A l'événement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T_1 ».

On désigne par B l'événement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T_2 ».

On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les événements contraires de A et B.

Une étude a montré que :

– la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_1 est $P(A) = 0{,}10$;

– la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T_2 est $P(B) = 0{,}20$;

– la probabilité qu'une lentille ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1. a) Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.
   b) Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T_1 et T_2.
   c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
2. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.
3. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T_2, sachant que cette lentille présente un défaut pour le traitement T_1.

Partie B.

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 lentilles dans la production. On considère ce prélèvement comme un prélèvement avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de lentilles qui présentent au moins un des deux défauts (pour le traitement T_1 ou pour le traitement T_2).

On admet, dans cette partie, que la probabilité qu'une lentille présente au moins un des deux défauts est : $p = 0{,}25$.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, 12 lentilles qui présentent au moins un des deux défauts. Arrondir le résultat à 10^{-4}.

4. On considère que la loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 12,5 et d'écart type 3,06.

   On note Y une variable aléatoire qui suit cette loi normale $N(12{,}5\ ;\ 3{,}06)$.

   a) Calculer, avec cette approximation, la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, 12 lentilles qui présentent au moins un des deux défauts, c'est à dire : $P(11{,}5 \leq Y \leq 12{,}5)$. Donner le résultat avec la précision permise par la table.

   b) Déterminer le nombre réel h tel que : $P(12{,}5 - h \leq Y \leq 12{,}5 + h) = 0{,}673$. Arrondir le résultat à l'unité.

Ce résultat peut s'énoncer de la façon suivante : avec une probabilité proche de 0,673 le nombre de lentilles présentant au moins un des deux défauts dans un tel échantillon de 50 lentilles, est compris entre 10 et 15.

Formulaire de mathématiques

B.T.S. OPTICIEN-LUNETIER

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$
e^t	e^t		
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$ $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3032	0,3293
2	0,0163	0,0333	0,0535	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0071	0,0126	0,0198
4		0,0002	0,0007	0,0015	0,0030
5			0,0001	0,0001	0,0003

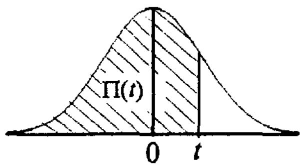
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.0498	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.000	0.002	0.005	0.013
18									0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.000	0.002
21											0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,dx$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 7	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 8	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$