

**BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR
ASSISTANT EN CRÉATION INDUSTRIELLE
MATHÉMATIQUES
SESSION 2003**

SUJET

Durée : 1 heure 30

Le sujet est composé de 3 pages numérotées de 1/7 à 3/7.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages, numérotées de 4/7 à 7/7

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

| | | | |
|------------------------|-------------------|---|--------------|
| CODE ÉPREUVE : AEE3MAT | EXAMEN : BTS | SPÉCIALITÉ : ASSISTANT EN CRÉATION INDUSTRIELLE. | |
| SESSION 2003 | SUJET | ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES | |
| Durée : 1h30 | Coefficient = 1.5 | N° sujet : 01GB03 | Page : 1 / 7 |

EXERCICE 1 (6 points)

On rapporte le plan à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Résoudre dans \mathbf{C} l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$. Les solutions, notées z_1 et z_2 , seront données sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Montrer que les points M_1 et M_2 d'affixe respective z_1 et z_2 sont sur le cercle de centre O et de rayon 1. En déduire une construction de ces points.
3. Calculer $\alpha = z_1 + z_2$, $\beta = z_1^2 + z_2^2$, $\gamma = z_1^3 + z_2^3$.

EXERCICE 2 (14 points)

Pour construire un tremplin de ski d'été en béton, une station de sports d'hiver fait appel à un ingénieur qui choisit de le profiler en utilisant la courbe représentative d'une fonction.

A. Soit f une fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Déterminer les réels a , b , c et d tels que :

$$f(0) = 1 \quad f(1) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(1) = 0.$$

B. On rapporte le plan à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) [unité :10 cm]

1. Soit g la fonction numérique définie sur \mathbf{R} par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

Etudier les variations de g sur $[0 ; 1,3]$ et dresser son tableau de variation.

2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative \mathcal{C} de g au point d'abscisse $x = 1,3$.

3. Tracer la partie de la courbe \mathcal{C} correspondant à l'intervalle $[0 ; 1,3]$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse $x = 0$, $x = 1$ et $x = 1,3$.

C. Hachurer la partie du plan délimitée par les axes, la droite d'équation $x=1,3$ et la courbe \mathcal{C} .

1. Calculer son aire, exprimée en cm^2 .
2. Ce domaine hachuré représente la coupe à l'échelle 1/100 d'un tremplin de ski en béton de largeur 5 m. Calculer le volume de béton nécessaire à la conception de ce tremplin.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

| $f(t)$ | $f'(t)$ | $f(t)$ | $f'(t)$ |
|--|-----------------------|----------|-------------------------------------|
| $\ln t$ | $\frac{1}{t}$ | $\sin t$ | $\cos t$ |
| e^t | e^t | $\cos t$ | $-\sin t$ |
| $t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$ | $\alpha t^{\alpha-1}$ | $\tan t$ | $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$ |

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

d) Equations différentielles

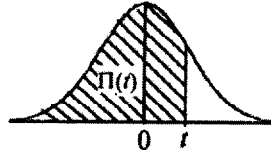
| Équations | Solutions sur un intervalle I |
|------------------------|---|
| $a(t)x' + b(t)x = 0$ | $f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$ |
| $x'' + \omega^2 x = 0$ | $x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ |

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



| t | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,500 0 | 0,504 0 | 0,508 0 | 0,512 0 | 0,516 0 | 0,519 9 | 0,523 9 | 0,527 9 | 0,531 9 | 0,535 9 |
| 0,1 | 0,539 8 | 0,543 8 | 0,547 8 | 0,551 7 | 0,555 7 | 0,559 6 | 0,563 6 | 0,567 5 | 0,571 4 | 0,575 3 |
| 0,2 | 0,579 3 | 0,583 2 | 0,587 1 | 0,591 0 | 0,594 8 | 0,598 7 | 0,602 6 | 0,606 4 | 0,610 3 | 0,614 1 |
| 0,3 | 0,617 9 | 0,621 7 | 0,625 5 | 0,629 3 | 0,633 1 | 0,636 8 | 0,640 6 | 0,644 3 | 0,648 0 | 0,651 7 |
| 0,4 | 0,655 4 | 0,659 1 | 0,662 8 | 0,666 4 | 0,670 0 | 0,673 6 | 0,677 2 | 0,680 8 | 0,684 4 | 0,687 9 |
| 0,5 | 0,691 5 | 0,695 0 | 0,698 5 | 0,701 9 | 0,705 4 | 0,708 8 | 0,712 3 | 0,715 7 | 0,719 0 | 0,722 4 |
| 0,6 | 0,725 7 | 0,729 0 | 0,732 4 | 0,735 7 | 0,738 9 | 0,742 2 | 0,745 4 | 0,748 6 | 0,751 7 | 0,754 9 |
| 0,7 | 0,758 0 | 0,761 1 | 0,764 2 | 0,767 3 | 0,770 4 | 0,773 4 | 0,776 4 | 0,779 4 | 0,782 3 | 0,785 2 |
| 0,8 | 0,788 1 | 0,791 0 | 0,793 9 | 0,796 7 | 0,799 5 | 0,802 3 | 0,805 1 | 0,807 8 | 0,810 6 | 0,813 3 |
| 0,9 | 0,815 9 | 0,818 6 | 0,821 2 | 0,823 8 | 0,825 4 | 0,828 9 | 0,831 5 | 0,834 0 | 0,836 5 | 0,838 9 |
| 1,0 | 0,841 3 | 0,843 8 | 0,846 1 | 0,848 5 | 0,850 8 | 0,853 1 | 0,855 4 | 0,857 7 | 0,859 9 | 0,862 1 |
| 1,1 | 0,864 3 | 0,866 5 | 0,868 6 | 0,870 8 | 0,872 9 | 0,874 9 | 0,877 0 | 0,879 0 | 0,881 0 | 0,883 0 |
| 1,2 | 0,884 9 | 0,886 9 | 0,888 8 | 0,890 7 | 0,892 5 | 0,894 4 | 0,896 2 | 0,898 0 | 0,899 7 | 0,901 5 |
| 1,3 | 0,903 2 | 0,904 9 | 0,906 6 | 0,908 2 | 0,909 9 | 0,911 5 | 0,913 1 | 0,914 7 | 0,916 2 | 0,917 7 |
| 1,4 | 0,919 2 | 0,920 7 | 0,922 2 | 0,923 6 | 0,925 1 | 0,926 5 | 0,927 9 | 0,929 2 | 0,930 6 | 0,931 9 |
| 1,5 | 0,933 2 | 0,934 5 | 0,935 7 | 0,937 0 | 0,938 2 | 0,939 4 | 0,940 6 | 0,941 8 | 0,942 9 | 0,944 1 |
| 1,6 | 0,945 2 | 0,946 3 | 0,947 4 | 0,948 4 | 0,949 5 | 0,950 5 | 0,951 5 | 0,952 5 | 0,953 5 | 0,954 5 |
| 1,7 | 0,955 4 | 0,956 4 | 0,957 3 | 0,958 2 | 0,959 1 | 0,959 9 | 0,960 8 | 0,961 6 | 0,962 5 | 0,963 3 |
| 1,8 | 0,964 1 | 0,964 9 | 0,965 6 | 0,966 4 | 0,967 1 | 0,967 8 | 0,968 6 | 0,969 3 | 0,969 9 | 0,970 6 |
| 1,9 | 0,971 3 | 0,971 9 | 0,972 6 | 0,973 2 | 0,973 8 | 0,974 4 | 0,975 0 | 0,975 6 | 0,976 1 | 0,976 7 |
| 2,0 | 0,977 2 | 0,977 9 | 0,978 3 | 0,978 8 | 0,979 3 | 0,979 8 | 0,980 3 | 0,980 8 | 0,981 2 | 0,981 7 |
| 2,1 | 0,982 1 | 0,982 6 | 0,983 0 | 0,983 4 | 0,983 8 | 0,984 2 | 0,984 6 | 0,985 0 | 0,985 4 | 0,985 7 |
| 2,2 | 0,986 1 | 0,986 4 | 0,986 8 | 0,987 1 | 0,987 5 | 0,987 8 | 0,988 1 | 0,988 4 | 0,988 7 | 0,989 0 |
| 2,3 | 0,989 3 | 0,989 6 | 0,989 8 | 0,990 1 | 0,990 4 | 0,990 6 | 0,990 9 | 0,991 1 | 0,991 3 | 0,991 6 |
| 2,4 | 0,991 8 | 0,992 0 | 0,992 2 | 0,992 5 | 0,992 7 | 0,992 9 | 0,993 1 | 0,993 2 | 0,993 4 | 0,993 6 |
| 2,5 | 0,993 8 | 0,994 0 | 0,994 1 | 0,994 3 | 0,994 5 | 0,994 6 | 0,994 8 | 0,994 9 | 0,995 1 | 0,995 2 |
| 2,6 | 0,995 3 | 0,995 5 | 0,995 6 | 0,995 7 | 0,995 9 | 0,996 0 | 0,996 1 | 0,996 2 | 0,996 3 | 0,996 4 |
| 2,7 | 0,996 5 | 0,996 6 | 0,996 7 | 0,996 8 | 0,996 9 | 0,997 0 | 0,997 1 | 0,997 2 | 0,997 3 | 0,997 4 |
| 2,8 | 0,997 4 | 0,997 5 | 0,997 6 | 0,997 7 | 0,997 7 | 0,997 8 | 0,997 9 | 0,997 9 | 0,998 0 | 0,998 1 |
| 2,9 | 0,998 1 | 0,998 2 | 0,998 2 | 0,998 3 | 0,998 4 | 0,998 4 | 0,998 5 | 0,998 5 | 0,998 6 | 0,998 6 |

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

| t | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,8 | 4,0 | 4,5 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\Pi(t)$ | 0,998 65 | 0,999 04 | 0,999 31 | 0,999 52 | 0,999 66 | 0,999 76 | 0,999 841 | 0,999 928 | 0,999 968 | 0,999 997 |

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

3. **PROBABILITES**

a) **Loi binomiale** $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

| $k \backslash \lambda$ | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 |
| 1 | 0,1637 | 0,2222 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 |
| 2 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 |
| 3 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 |
| 4 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 |
| 5 | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 |
| 6 | | | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

| $k \backslash \lambda$ | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0,368 | 0,223 | 0,135 | 0,050 | 0,018 | 0,007 | 0,002 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1 | 0,368 | 0,335 | 0,271 | 0,149 | 0,073 | 0,034 | 0,015 | 0,006 | 0,003 | 0,001 | 0,000 |
| 2 | 0,184 | 0,251 | 0,271 | 0,224 | 0,147 | 0,084 | 0,045 | 0,022 | 0,011 | 0,005 | 0,002 |
| 3 | 0,061 | 0,126 | 0,180 | 0,224 | 0,195 | 0,140 | 0,089 | 0,052 | 0,029 | 0,015 | 0,008 |
| 4 | 0,015 | 0,047 | 0,090 | 0,168 | 0,195 | 0,176 | 0,134 | 0,091 | 0,057 | 0,034 | 0,019 |
| 5 | 0,003 | 0,014 | 0,036 | 0,101 | 0,156 | 0,176 | 0,161 | 0,128 | 0,092 | 0,061 | 0,038 |
| 6 | 0,001 | 0,004 | 0,012 | 0,050 | 0,104 | 0,146 | 0,161 | 0,149 | 0,122 | 0,091 | 0,063 |
| 7 | 0,000 | 0,001 | 0,003 | 0,022 | 0,060 | 0,104 | 0,138 | 0,149 | 0,140 | 0,117 | 0,090 |
| 8 | | 0,000 | 0,001 | 0,008 | 0,030 | 0,065 | 0,103 | 0,130 | 0,140 | 0,132 | 0,113 |
| 9 | | | 0,000 | 0,003 | 0,013 | 0,036 | 0,069 | 0,101 | 0,124 | 0,132 | 0,125 |
| 10 | | | | 0,001 | 0,005 | 0,018 | 0,041 | 0,071 | 0,099 | 0,119 | 0,125 |
| 11 | | | | 0,000 | 0,002 | 0,008 | 0,023 | 0,045 | 0,072 | 0,097 | 0,114 |
| 12 | | | | | 0,001 | 0,003 | 0,011 | 0,026 | 0,048 | 0,073 | 0,095 |
| 13 | | | | | 0,000 | 0,001 | 0,005 | 0,014 | 0,030 | 0,050 | 0,073 |
| 14 | | | | | | 0,000 | 0,002 | 0,007 | 0,017 | 0,032 | 0,052 |
| 15 | | | | | | | 0,001 | 0,003 | 0,009 | 0,019 | 0,035 |
| 16 | | | | | | | 0,000 | 0,001 | 0,005 | 0,011 | 0,022 |
| 17 | | | | | | | | 0,001 | 0,002 | 0,006 | 0,013 |
| 18 | | | | | | | | 0,000 | 0,001 | 0,003 | 0,007 |
| 19 | | | | | | | | | 0,000 | 0,001 | 0,004 |
| 20 | | | | | | | | | | 0,001 | 0,002 |
| 21 | | | | | | | | | | 0,000 | 0,001 |
| 22 | | | | | | | | | | | 0,000 |