ISDRMAT

BTS INFORMATIQUE DE GESTION **SESSION 2003**

E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **Coéfficient : 2**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet.

EXERCICE N° 1 (5 points)

On considère l'expression E dépendant des variables booléennes a, b et c :

$E=\overline{a}\,\overline{c}+b\overline{c}+a\overline{b}+\overline{a}\,\overline{b}c.$

1) Simplifier l'expression $\overline{E}$ à l'aide de la lecture d'un tableau de Karnaugh (ou d'une table de vérité) et en déduire que : $E=\overline{b}+\overline{c}$.

2) *Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à trouver un emploi, on considère pour ces personnes, trois variables booléennes définies ainsi :*

   $a = 1$ si la personne est âgée de 45 ans ou plus (sinon $a = 0$).

   $b = 1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus (sinon $b = 0$).

   $c = 1$ si la personne a déjà suivi une formation l'année précédente (sinon $c = 0$).

   Une formation qualifiante sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

   - *avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins de un an,*
   - *avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente,*
   - *être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente,*
   - *avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins de un an et avoir suivi une formation l'année précédente.*

   Les personnes qui ne répondent à aucun de ces quatre critères, pourront participer à un stage d'insertion en entreprise.

a) Ecrire l'expression booléenne F en fonction des variables a, b et c qui traduit le fait que la personne pourra suivre cette formation qualifiante.
b) En déduire, en utilisant le résultat du 1), les personnes qui ne pourront pas participer à la formation qualifiante et qui participeront donc à un stage d'insertion en entreprise.

EXERCICE N° 2 (6 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice $B = A - I$ puis calculer les matrices B^2 et B^3.
2) En déduire la matrice B^n pour tout entier n, $n \geq 3$.
3) *La formule du binôme, appliquée au développement de $(B+I)^n$ permet d'écrire pour tout entier n, $n \geq 3$:*

$$A^n = (I+B)^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B^3 + \dots C_n^k B^k + \dots + C_n^{n-1} B^{n-1} + B^n, \text{ où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

   a) Vérifier que, pour $n \geq 3$, $A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$.

   b) Montrer, à l'aide des résultats du 1) :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout entier } n, n \geq 3.$$

4) **Application** : on considère le graphe orienté G de sommets X, Y et Z, pris dans cet ordre et dont la matrice d'adjacence est la matrice A.

   a) Donner une représentation géométrique du graphe G.
   b) Déterminer, à l'aide des questions précédentes, le nombre de chemins de longueur 5 du sommet Y au sommet Z.

EXERCICE N° 3 (9 points)

Une entreprise a mis au point un circuit électronique formé essentiellement de deux composants distincts C_1 et C_2 montés en parallèle de telle sorte que ***ce circuit ne peut tomber en panne que lorsque les deux composants C_1 et C_2 sont simultanément en panne.***

PARTIE A

Au bout de 6 000 heures d'utilisation du circuit électronique composé des éléments C_1 et C_2, on considère les événements suivants :
A : « Le composant C_1 n'a pas eu de panne »
B : « Le composant C_2 n'a pas eu de panne ».

On considèrera que les pannes des composants C_1 et C_2 sont indépendantes et que les probabilités respectives des événements A et B sont : $p(A) = 0,22$ et $p(B) = 0,05$.

Pour tous les calculs de probabilités demandés dans cette partie, on donnera les résultats sous leur forme approchée décimale arrondie à 10^{-2} près.

1) On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les événements contraires des événements A et B.
   Calculer la probabilité de chacun des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2)
   a) Calculer la probabilité que le circuit électronique tombe en panne au bout de 6 000 heures.
   b) En déduire la probabilité que le circuit électronique fonctionne sans panne au bout de 6 000 heures.

3) *Le composant C_1 peut avoir plusieurs pannes dans la période des premières heures d'utilisation. On admet que le nombre de pannes du composant C_1 dans la période des 6 000 premières heures d'utilisation suit la loi de Poisson de paramètre 1,5. On note X la variable aléatoire associée au nombre de pannes du composant C_1 au cours de cette période.*

   a) Déterminer la probabilité que le composant C_1 ait au plus deux pannes au bout de 6 000 heures.
   b) Déterminer la probabilité que le composant C_1 ait au moins une panne au bout de 6 000 heures.

PARTIE B

Le service qualité de l'entreprise, chargé de tester le temps de fonctionnement de ce circuit électronique, vérifie d'abord le nombre d'heures de fonctionnement de chacun des composants C_1 et C_2.
Les résultats obtenus sont les suivants :

les fonctions f_1 et f_2 correspondant respectivement à la probabilité que les composants C_1 et C_2 fonctionnent sans panne au bout de t milliers d'heures d'utilisation, sont définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{-0,25\,t} \quad et \quad f_2(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}.$$

1) *Etudes des fonctions. Tracés des courbes représentatives.*

   a) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2.
   b) Comment peut-on interpréter ces résultats pour les composants C_1 et C_2 ?
   c) Tracer, sur le même graphique, de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes représentatives Γ_1 et Γ_2 des fonctions f_1 et f_2.

   On tracera les deux courbes sur l'intervalle [0 , 6] en prenant pour unités :

   - 1 cm pour 500 heures en abscisse.
   - 10 cm pour la probabilité égale à 1, en ordonnée.

2)
   a) Déterminer graphiquement pour chaque composant, au bout de combien d'heures, on aura une probabilité qu'il fonctionne sans panne, égale à 0,37.
   On indiquera tous les tracés utiles et on arrondira le résultat à une centaine d'heures près.

   b) En déduire, par lecture graphique, lequel des deux composants fonctionnera le plus longtemps sans panne.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS INFORMATIQUE DE GESTION

1. ***RELATIONS FONCTIONNELLES :***

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. ***CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL***

a) **Limites usuelles**

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) **Dérivées et primitives :**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\,\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x'+b(t)\,x=0$	$f(t)=k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t\mapsto\dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES* :

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

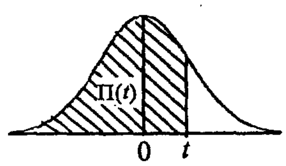
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$