SESSION 2004

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

Conception de Produits Industriels

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures
Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :
L'usage des calculatrices et du formulaire de mathématiques est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

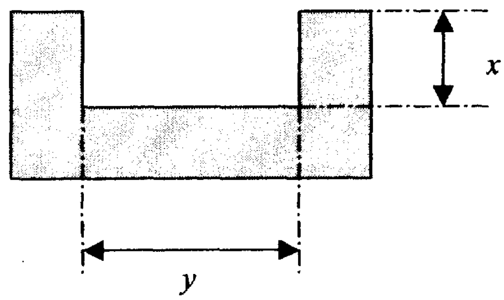
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages, numérotées de 1 à 4.

Code sujet : CPMAT

EXERCICE 1 (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique, en grande série, des pièces mécaniques, dont une vue en coupe est représentée ci-contre.
Une telle pièce est acceptée après contrôle si sa cote x, exprimée en millimètres, est comprise dans l'intervalle [49,8 ; 50,2] et si sa cote y, exprimée en millimètres, est comprise dans l'intervalle [59,9 ; 60,1].



Dans cet exercice les résultats approchés seront à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

1) On suppose que la variable aléatoire X, qui à une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée associe sa cote x, suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,09.
Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit acceptée par le contrôle pour la cote x.

2) On suppose maintenant que la variable aléatoire Y, qui à une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée associe sa cote y, suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type σ.
Déterminer la valeur de σ pour qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée soit acceptée par le contrôle, pour la cote y, avec une probabilité égale à 0,95.

B. Evènements indépendants

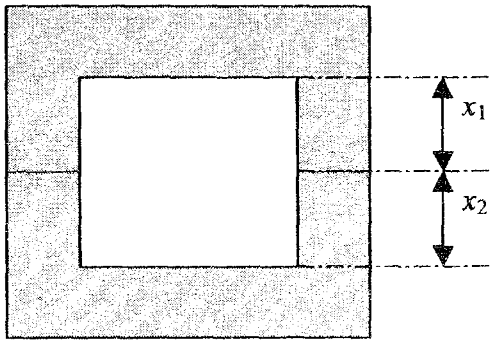
On prélève une pièce au hasard dans un lot de ce type de pièces.
On appelle E_1 l'événement : "la pièce est défectueuse pour la cote x " et E_2 l'événement : "la pièce est défectueuse pour la cote y ".
On suppose que les deux évènements E_1 et E_2 sont indépendants, que $P(E_1) = 0,03$ et que $P(E_2) = 0,05$.

1) Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse pour les deux cotes x et y.

2) Une pièce est jugée défectueuse si elle l'est pour au moins une des deux cotes x ou y.
Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans le lot soit défectueuse.

C. Somme de deux variables aléatoires

On prélève au hasard deux pièces dans un stock, pour les assembler comme l'indique la figure ci-dessous. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de deux pièces.



On désigne par X_1 la variable aléatoire qui associe à la première pièce tirée sa cote x_1, et par X_2, la variable aléatoire qui associe à la deuxième pièce tirée sa cote x_2.
On admet que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,09 et que X_1 et X_2 sont indépendantes.
On appelle Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2$.

1) Justifier que Z suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,13.

2) Un tel assemblage est jugé défectueux si la somme $x_1 + x_2$ est inférieure à 99,8 mm.
Calculer la probabilité qu'un tel assemblage soit défectueux.

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = -2e^{-x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.

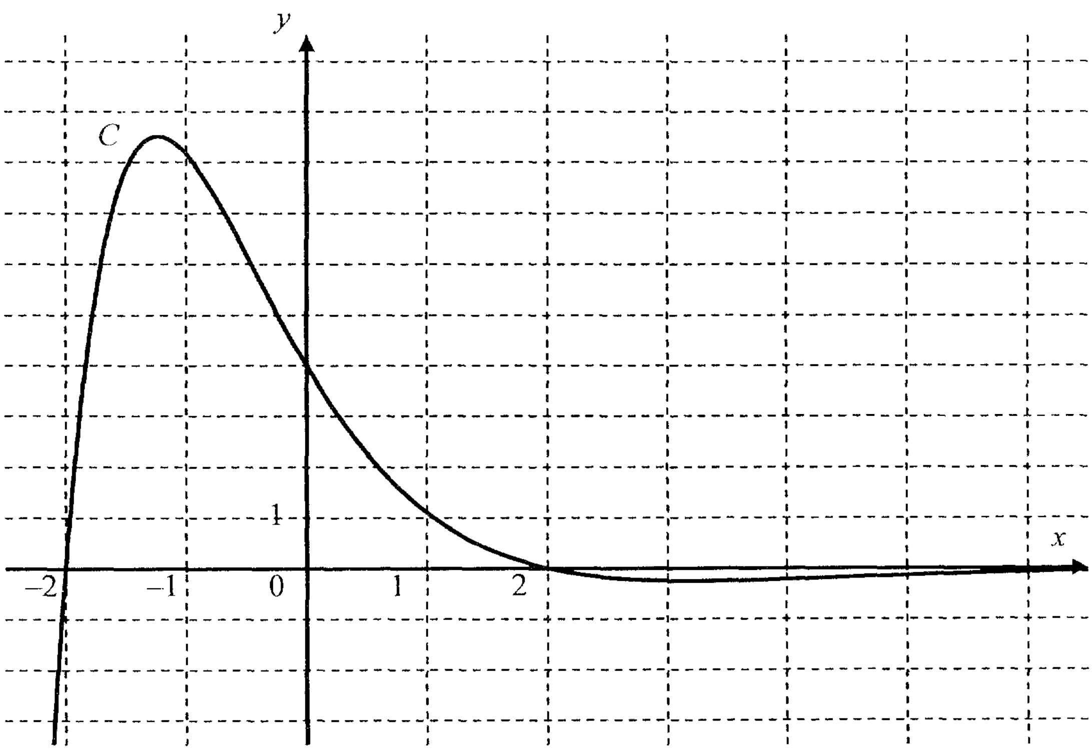
2° Soit h la fonction définie sur **R** par $h(x) = -x^2 e^{-x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 4$ et $f(2) = 0$.

B. Etude d'une fonction

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (4 - x^2)\,e^{-x}$.



1° Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2° a) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Que peut-on déduire du a) pour la courbe C ?

3° a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbf{R}$, $f'(x) = (x^2 - 2x - 4)\, e^{-x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$. (On donnera les valeurs exactes des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.)

c) En déduire le tableau de variation de f. On fera figurer dans ce tableau les valeurs approchées arrondies à 10^{-2} des éventuels extremums de f.

4° a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

b) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = 4 - 4x + x^2 + x^2\, \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c) Déduire du b) une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

d) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1° La fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout x de $\mathbf{R}$, $f(x) = -f''(x) - 2f'(x) - 2\, e^{-x}$.
En déduire qu'une primitive F de f est définie sur $\mathbf{R}$ par :
$F(x) = (x^2 + 2x - 2)\, e^{-x}$.

2° On note $I = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = 2\, e^2 + 6\, e^{-2}$.

3° Donner une interprétation graphique de I.

EXERCICE 3 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
On souhaite construire la courbe de Bézier associée aux points de définition suivants donnés par leurs coordonnées :

$P_0(0, 0)$, $P_1(0, 2)$, $P_2(10, 2)$, $P_3(5, 0)$.

On rappelle que la courbe de Bézier Γ associée à ces points est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées (x, y) tels que, pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\overrightarrow{OM(t)} = B_{0,3}(t)\ \overrightarrow{OP_0} + B_{1,3}(t)\ \overrightarrow{OP_1} + B_{2,3}(t)\ \overrightarrow{OP_2} + B_{3,3}(t)\ \overrightarrow{OP_3}\ .$$

On rappelle que les polynômes de Bernstein $B_{i,n}$ sont définis par $B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i\, (1-t)^{n-i}$.

1° Donner l'expression en fonction de t de $B_{0,3}(t)$, $B_{1,3}(t)$, $B_{2,3}(t)$ et $B_{3,3}(t)$.

2° En déduire qu'un système d'équations paramétriques de Γ est :

$$\begin{cases} x = f(t) = 30t^2 - 25t^3 \\ y = g(t) = -6t^2 + 6t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

3° Étudier les variations de f et g sur $[0, 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° Déterminer un vecteur directeur des tangentes à la courbe Γ aux points $M(0)$ et $M(0{,}8)$ obtenus pour $t = 0$ et $t = 0{,}8$.

5° Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(t)$	0								6,4		
$g(t)$	0								1		

6° Tracer les tangentes déterminées précédemment puis la courbe Γ.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^{\alpha} = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha} = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{\alpha} = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^{\alpha}} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^{\alpha}} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^{\alpha} = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^{\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^{\alpha} \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\mathrm{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\mathrm{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

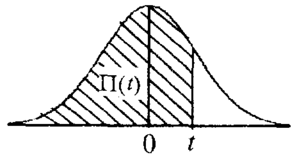
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$