

## BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

### TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE

#### SCIENCES PHYSIQUES

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

*Le matériel autorisé comprend toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.*

- *Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.*
- *Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.*

**ACADEMIE DE LILLE**

**BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR**  
**TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE**

**EPREUVE - SCIENCES PHYSIQUES**  
**DU 17 MAI 2004 DE 14 H A 18 H**

**PRECISION A APPORTER AUX CANDIDATS LE JOUR DE L'EPREUVE**

**Partie 2 : Etude du circuit de mise en forme - page 8/10 - question 2.7 :**

**Au lieu de :**

Sur le document réponse, tracer  $u_2(t)$  sachant que  $u_2(t) = -V_{\text{sat}}$  pour  $t = 0$ .

**Lire :**

Sur le document réponse, tracer  $u_2(t)$  sachant que  $u_2(t) = +V_{\text{sat}}$  pour  $t = 0$ .

**PARTIE MÉCANIQUE, THERMODYNAMIQUE ET CHIMIE (durée conseillée 1 h 15 min)****ÉTUDE D'UNE COGÉNÉRATION (6 points)****Le sujet comporte 2 parties complètement indépendantes.****La machine à calculer est autorisée.**

Un cogénérateur est un moteur thermique permettant la production simultanée de chaleur (pour le chauffage d'un ensemble de bâtiments) et d'électricité (pour l'éclairage et l'alimentation d'appareils électriques dans cet ensemble de bâtiments ; l'excédent éventuel peut être revendu à EDF).

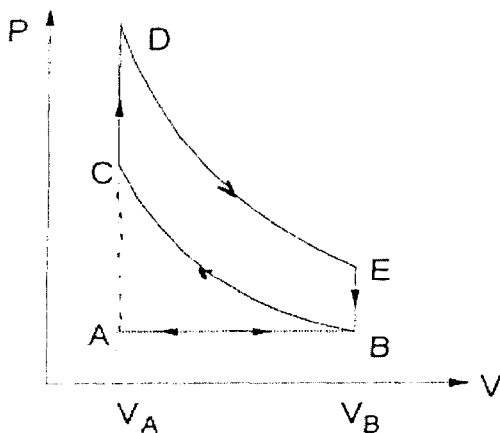
Il est constitué :

- d'un moteur à pistons à allumage commandé alimenté en gaz naturel qui sera considéré comme du méthane (de formule chimique  $\text{CH}_4$ , masse molaire  $M(\text{CH}_4) = 16,0 \text{ g.mol}^{-1}$ ). Ce moteur est couplé à un alternateur pour la fourniture du courant de fréquence 50 Hz ;
- de deux échangeurs thermiques (haute et basse températures) pour récupérer la chaleur dégagée par le moteur et les gaz d'échappement et produire l'eau chaude destinée au chauffage.

**Partie 1 : Etude du moteur thermique**

Le moteur est d'un type analogue à ceux des automobiles à essence.

Il fonctionne suivant le cycle Beau de Rochas qui est schématisé ci-dessous en coordonnées de Clapeyron.



- Admission de A à B du mélange air + gaz naturel
- Compression adiabatique réversible de B à C
- Combustion interne du mélange de C à D
- Détente adiabatique réversible de D à E
- Refroidissement de E à B grâce aux échangeurs
- Echappement de B à A.

Ce cycle correspond à deux tours de l'arbre moteur.

Le moteur est constitué de 16 cylindres représentant une cylindrée totale  $V_B - V_A = 71,0 \text{ L}$ . En régime nominal, la vitesse de rotation de son arbre est de  $1500 \text{ tr.min}^{-1}$ .

Pour simplifier, tous les mélanges gazeux avant et après combustion seront assimilés à un gaz parfait pour lequel le rapport des capacités thermiques massiques à pression et volume constants vaut  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,32$ . La constante des gaz parfaits vaut  $R = 8,32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

**1.1** - Vérifier que la durée d'un cycle est de  $0,080 \text{ s}$ .

**1.2** - Déterminer la masse d'air, assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$ , admise dans les cylindres à chaque cycle. Pour faire ce calcul et uniquement pour cette question, on néglige la masse de gaz naturel introduite.

On donne : la température d'admission  $T_B = 300 \text{ K}$   
la pression d'admission  $P_A = P_B = 2,00 \text{ bar}$ .

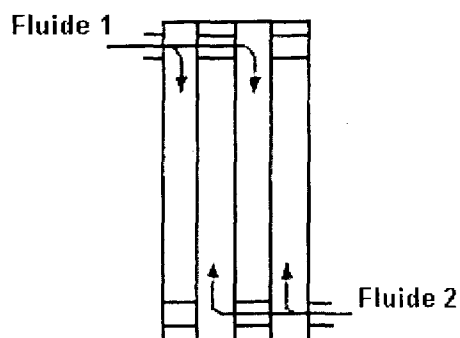
En déduire le débit massique d'air à l'admission.

- 1.3** - Le débit massique de gaz naturel à l'admission est de  $7,80 \cdot 10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}$  et le débit massique des gaz d'échappement est de  $2,140 \text{ kg.s}^{-1}$ . En effectuant un bilan de masse, retrouver le débit massique d'air à l'admission obtenu en question **1.2**.
- 1.4** - Le rapport de compression volumétrique  $r_{cv} = \frac{V_B}{V_A}$  est égal à 11,7.
- 1.4.1** - Donner la relation (de Laplace) liant la température  $T$  et le volume  $V$  au cours d'une transformation adiabatique réversible.
- 1.4.2** - Calculer la température  $T_C$  du mélange {air + gaz naturel} en fin de compression.
- 1.5** - Calculer les nombres de moles de gaz naturel et d'air admises dans les cylindres à chaque cycle. En déduire le travail  $W_{BC}$  reçu par le mélange (supposé idéal) au cours de la compression pour un cycle. Les soupapes des cylindres maintiennent le système fermé lors de cette compression.
- 1.6** - La combustion du mélange (phase CD) libère une puissance thermique de 3470 kW. Le travail  $W_{DE}$  cédé par les gaz d'échappement au cours de la détente pour un cycle est  $W_{DE} = -155,1 \text{ kJ}$ .
- 1.6.1** - Calculer le rendement thermodynamique du moteur.
- 1.6.2** - Sachant que l'alternateur produit 1200 kW de puissance électrique, calculer le rendement de la conversion énergie chimique de combustion  $\rightarrow$  énergie électrique.

## Partie 2 : Etude des échangeurs thermiques

Dans cette partie, la capacité thermique massique de l'eau sera considérée comme constante et égale à  $4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

- 2.1** - L'échangeur haute température refroidit directement le moteur grâce à une circulation d'eau sous pression qui rentre dans le moteur à  $82^\circ\text{C}$  et en sort à  $92^\circ\text{C}$ . On souhaite récupérer une puissance thermique de 656 kW grâce à l'échangeur.
- On donne la masse volumique de l'eau à la température moyenne d'échange  $\rho = 968 \text{ kg.m}^{-3}$ .
- Déterminer le débit volumique de l'eau dans l'échangeur pour obtenir cette puissance.
- 2.2** - L'échangeur basse température est un échangeur à plaques où les gaz d'échappement (fluide 1) et l'eau (fluide 2) circulent à contre - courant (voir schéma ci-dessous). Il permet de récupérer une puissance thermique de 967 kW.



Expliquer qualitativement pourquoi la circulation des fluides à contre-courant augmente l'efficacité de l'échangeur par rapport à une circulation à co-courant. On tracera l'allure des graphes donnant l'évolution de la température le long de l'échangeur pour chaque fluide.

- 2.3** - Calculer le rendement de la conversion énergie chimique de combustion  $\rightarrow$  énergie thermique pour les deux échangeurs. On rappelle que la puissance thermique libérée lors de la combustion est de 3470 kW.

## PARTIE OPTIQUE (durée 1 h 15 min)

### MESURE DE L'ÉPAISSEUR D'UNE LAME A FACES PARALLELES PAR DEUX METHODES INTERFEROMETRIQUES (6 points).

Le sujet comporte 2 parties complètement indépendantes.

La machine à calculer est autorisée.

On dispose d'une lame mince à faces parallèles transparente et d'indice  $n = 1,524$  dont on veut déterminer avec précision l'épaisseur  $e$ . On procède des deux façons suivantes.

#### Partie 1 : Mesure des diamètres des anneaux d'égalé inclinaison.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la **figure 1 (document annexe n° 1)**.

La lampe spectrale, placée latéralement, munie de son filtre, est considérée comme une source monochromatique de longueur d'onde :  $\lambda_0 = 546,1$  nm.

La lame séparatrice semi-réfléchissante renvoie la lumière sur la lame mince étudiée, placée sur un support noir mat (qui ne transmet pas la lumière).

On observe les interférences par réflexion induite entre deux rayons consécutifs issus d'un rayon incident au moyen d'une lentille de distance focale image  $f' = 5,00$  cm, dont l'axe optique est perpendiculaire aux faces de la lame mince, et d'un photorécepteur balayant, dans le plan focal, une droite passant par le foyer principal image.

#### 1.1 -

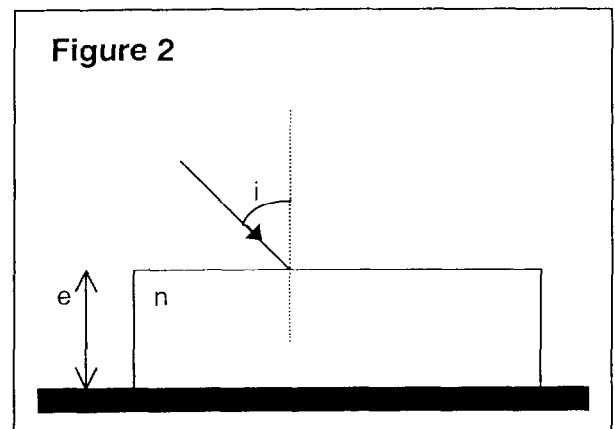
**1.1.1** - Reproduire la figure 2 ci-contre sur la copie et la compléter en indiquant la marche des deux rayons, issus du rayon incident, qui interfèrent à l'infini.

**1.1.2** - Montrer que la différence de chemin optique entre ces deux rayons interférant dans le plan focal de la lentille est donnée par  $\delta_{\text{geom}} = 2.n.e.\cos r$ .

$r$  représente l'angle de réfraction dans la lame d'un rayon arrivant sous l'incidence  $i$ .

**1.1.3** - Justifier l'ajout du terme  $\frac{\lambda_0}{2}$  dans

l'expression de  $\delta$ , différence de marche totale introduite par la lame mince.



**1.2** - Dans le cas des faibles incidences, montrer que l'on peut écrire  $\delta = 2.n.e.\left(1 - \frac{i^2}{2.n^2}\right) + \frac{\lambda_0}{2}$ .

On rappelle l'approximation des petits angles :

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad \text{avec } \alpha \text{ angle exprimé en radians.}$$

#### 1.3 -

**1.3.1** - Justifier l'observation d'une figure d'interférences sous forme d'anneaux concentriques alternativement brillants et sombres, dans le plan focal de la lentille, centrés sur son axe optique.

**1.3.2** - Exprimer  $p_0$ , l'ordre d'interférence au centre de la figure.

**1.3.3** - Exprimer  $p_k$  pour le  $k^{\text{ème}}$  anneau brillant en fonction de l'angle d'incidence  $i_k$  des rayons produisant le  $k^{\text{ème}}$  anneau brillant.

## 1.4 -

1.4.1 - On pose  $p_0 = m_0 + \varepsilon$  avec  $m_0$  entier et  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Exprimer la différence  $p_0 - p_k$  en fonction de  $k$  et  $\varepsilon$  puis en fonction de  $i_k$ ,  $e$ ,  $n$  et  $\lambda_0$ .

1.4.2 - Donner la relation qui lie  $i_k$ ,  $f'$  et le rayon  $R_k$  du  $k^{\text{ème}}$  anneau brillant dans le plan focal de la lentille.

1.4.3 - En déduire que l'expression de  $R_k$  est :  $R_k = f' \cdot \sqrt{\frac{n \cdot \lambda_0}{e}} \cdot \sqrt{k - 1 + \varepsilon}$ .

1.5 - Montrer que l'expression de  $R_k^2$ , en fonction de  $k$ , est du type  $R_k^2 = a \cdot k + b$ . Donner l'expression de  $a$  en fonction de  $f'$ ,  $n$ ,  $\lambda_0$  et  $e$ .

1.6 - La mesure des diamètres obtenus a donné:

k	1	2	3	4	5
Diamètre en cm	1,49	2,21	2,75	3,20	3,59

Tracer la courbe  $R_k^2 = f(k)$  ; en déduire le coefficient directeur  $a$  et la valeur de l'épaisseur  $e$ .

## Partie 2 : Mesure des longueurs d'onde de cannelures dans le spectre de la lumière réfléchiée par la lame.

On modifie le dispositif précédent en remplaçant la source de lumière monochromatique par une puissante source de lumière blanche parfaitement collimatée qui éclaire, grâce à la séparatrice semi-réfléchissante, la lame à faces parallèles étudiée sous une incidence rigoureusement normale.

Au foyer de la lentille d'observation, on place cette fois la fente d'entrée très fine d'un spectroscopie à réseau de bonne résolution. Le spectroscopie est interfacé à un ordinateur qui permet d'obtenir le profil d'intensité lumineuse, représenté en **figure 3 (document annexe n° 2)**, en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  (la valeur 10 pour le maximum d'intensité est arbitraire).

2.1 - Justifier la présence de cannelures dans le spectre.

2.2 - On montre que, si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des longueurs d'onde de cannelures noires ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) et  $p$  le nombre de maxima qui les séparent, l'épaisseur  $e$  est donnée par :

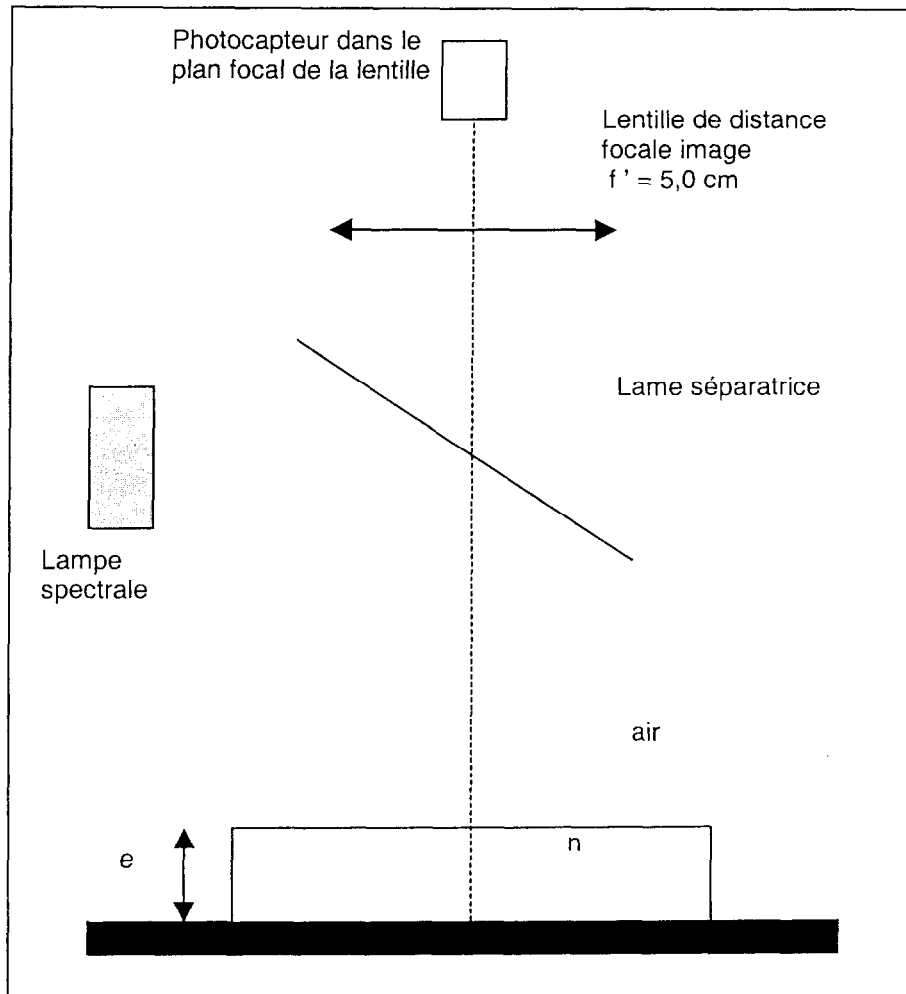
$$e = \frac{p}{2n} \times \left( \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right).$$

On suppose que les variations de l'indice  $n$  avec  $\lambda$  sont négligeables pour  $540 \text{ nm} \leq \lambda \leq 580 \text{ nm}$ .

En repérant deux cannelures noires sur l'enregistrement, déterminer l'épaisseur  $e$  de la lame étudiée. On s'attachera à faire une mesure la plus précise possible. Vérifier la cohérence du résultat avec la mesure précédente.

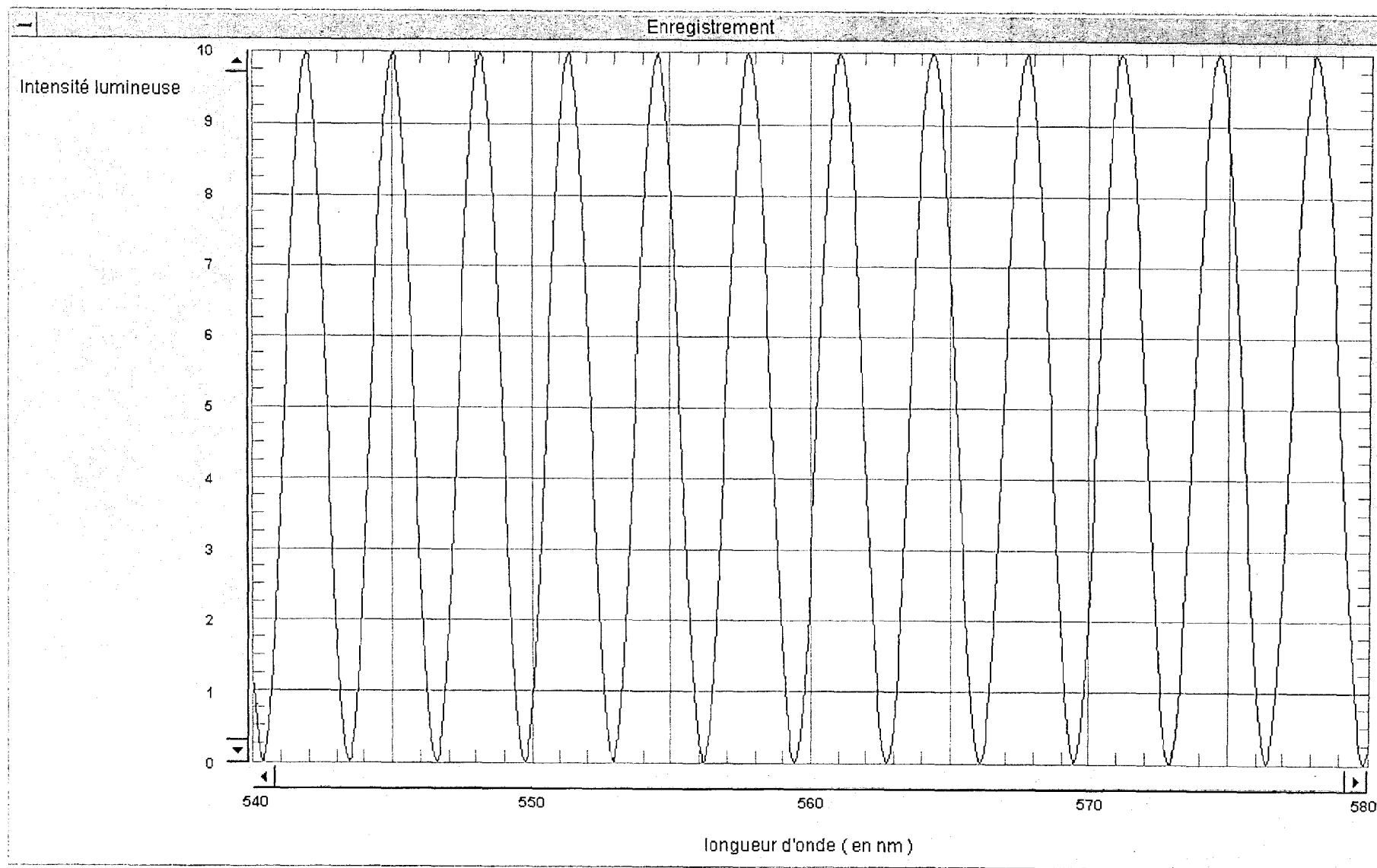
## DOCUMENT ANNEXE N° 1

Figure 1 : Dispositif expérimental



**DOCUMENT ANNEXE N° 2**

**Figure 3**





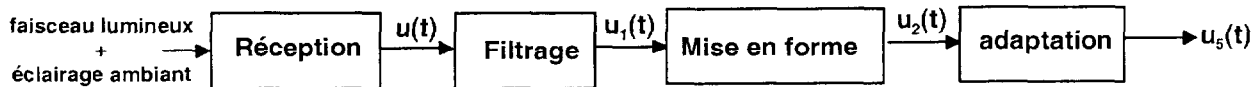
**PARTIE ÉLECTRICITÉ (durée conseillée 1h30 mn)**

**Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes. Il est cependant conseillé au candidat de les traiter dans l'ordre. Le document réponse (même vierge) doit être joint impérativement à la copie.**

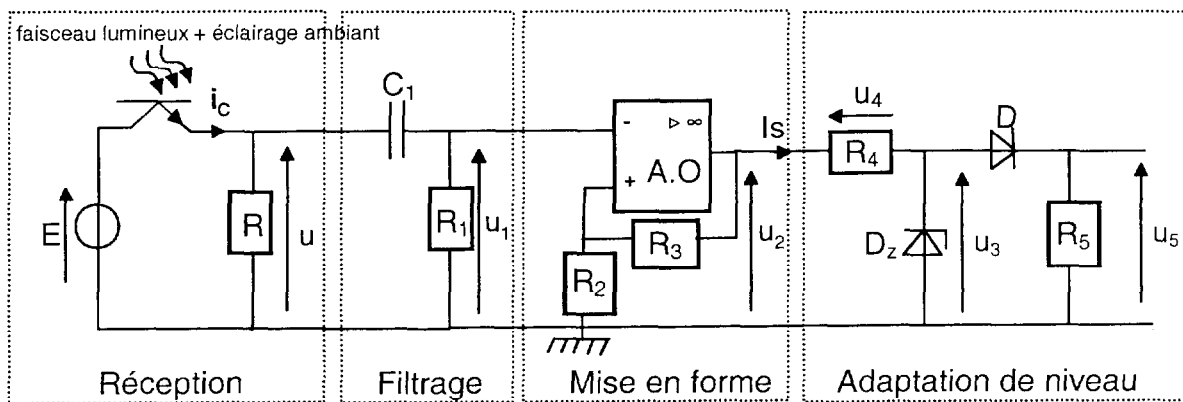
L'étude porte sur la réception d'un faisceau lumineux issu d'un émetteur infra-rouge oscillant à la fréquence  $f_0 = 13,3$  kHz. Celui-ci se trouve perturbé par l'éclairage ambiant.

Il s'agit de mettre en forme et d'adapter le signal électrique issu de la réception.

Le synoptique du dispositif est le suivant :



**Schéma structurel utilisé :**



La partie réception n'est pas étudiée.

**Partie 1 : Etude du filtrage**

**1.1** - Quels sont le type (passe-bas, passe-haut, passe-bande...) et l'ordre du filtre ?

**1.2** - Etablir sa fonction de transfert complexe  $\underline{T} = \underline{U}_1 / \underline{U}$ .

**1.3** - La fonction de transfert peut se mettre sous la forme  $\underline{T} = \frac{j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}}$ .

En déduire l'expression de la fréquence de coupure  $f_c$  à -3 dB.

**1.4** - Le phototransistor reçoit le signal lumineux de fréquence  $f_0 = 13,3$  kHz perturbé par la lumière, issue de l'éclairage ambiant, de fréquence 100 Hz. Justifier cette dernière valeur sachant que le réseau E.D.F est à la fréquence de 50 Hz.

**1.5** - Le signal parasite  $u_p(t)$  de fréquence 100 Hz doit être atténué de 99 %.

Si  $U_p$  représente sa valeur efficace à l'entrée du filtre et  $U_{1p}$  celle de sortie, calculer la valeur du module de  $\underline{T}$  appliqué au signal parasite :  $|\underline{T}_p| = U_{1p} / U_p$ .

**1.6** - En déduire la valeur du gain  $G_p$  correspondant (en dB).

**1.7** - Calculer la valeur de la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre.

**1.8** - Le condensateur  $C_1$  a une capacité de 10 nF ; en déduire la valeur de la résistance  $R_1$ .

## Partie 2 : Etude du circuit de mise en forme

Dans cette partie, on suppose que le signal parasite  $u_p(t)$  est éliminé.

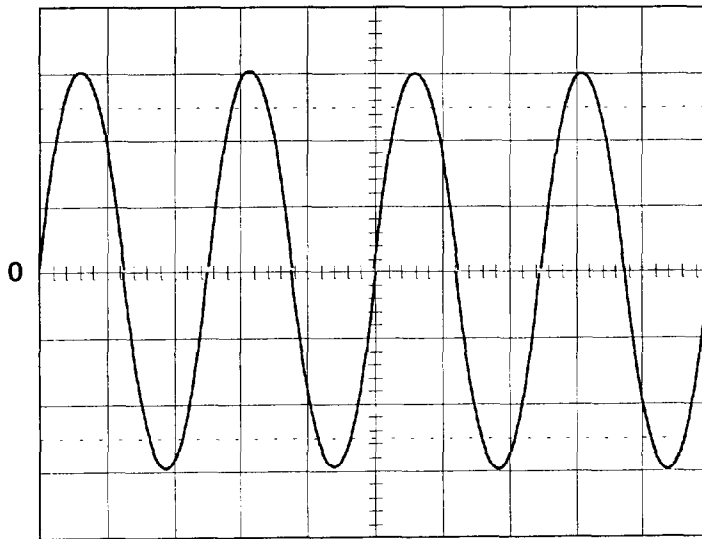
L'amplificateur opérationnel, considéré comme parfait, est alimenté entre  $+V_{cc}$  et  $-V_{cc}$  ( $V_{cc} = 12V$ ).

Les tensions de saturation de l'amplificateurs sont :  $\pm V_{sat} = \pm V_{cc}$ .

**2.1** - En observant le schéma structurel du circuit de mise en forme, justifier que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime de commutation. Donner les valeurs possibles de la tension de sortie  $u_2$ .

Le signal  $u_1(t)$  recueilli à l'oscilloscope en sortie du filtre a l'allure suivante :

Oscillogramme(s) : signal  $u_1(t)$  relevé à la sortie du filtre



**Utilisation :**

Avec base de temps

**Echelles :**

Vitesse de balayage : ? s/div

**Sensibilité :**

Voie I : 1V /div

**Mode de couplage des entrées :**

	GND	AC	DC
Voie I			X
Voie II	X		

**Synchronisation :**

Voie I	Voie II	EXT
X		

**Mode de déclenchement :**

AC	DC	HF	LF	~	+/-
X					+

**2.2** - A partir de l'oscillogramme, déterminer la valeur crête à crête et l'amplitude de  $u_1(t)$ .  
Calculer sa valeur efficace de  $U_1$ .

**2.3** - Rappeler la valeur de sa fréquence (voir question 1.4) et calculer sa période  $T_0$ .  
En déduire la vitesse de balayage de l'oscilloscope.

**2.4** - Exprimer le potentiel  $v^+$  de l'entrée non inverseuse en fonction de  $R_2$  et  $R_3$  et  $u_2$ .

Ecrire ensuite l'expression de la tension d'entrée différentielle  $\varepsilon = v^+ - v^-$  en fonction de  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .

**2.5** - En déduire que la valeur des seuils de  $u_1$  qui provoquent le basculement de la tension de sortie s'écrit :  $V_{seuil} = \pm \frac{R_2}{R_2 + R_3} \times V_{SAT}$ .

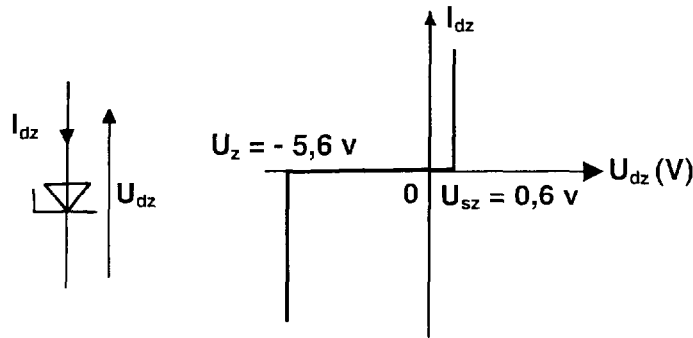
Application numérique :  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 86 \text{ k}\Omega$ .

**2.6** - Tracer, sur le **document réponse**, le cyclogramme de  $u_2$  en fonction de  $u_1$ . Indiquer sur ce dernier le sens de parcours du cycle ainsi que les valeurs remarquables des tensions.

**2.7** - Sur le document réponse, tracer  $u_2(t)$  sachant que  $u_2(t) = -V_{sat}$  pour  $t = 0$ .  
Les valeurs numériques des tensions seront portées sur les deux courbes  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ .

### Partie 3 : Etude de l'adaptation du niveau

La diode Zener (voir le **schéma structurel**) présente la caractéristique suivante :



**3.1** - Quelle est la valeur de la tension Zener ?

Quelle est la tension présente à ses bornes lorsqu'elle est traversée par un courant  $I_{dz}$  positif ?

**3.2** - On suppose que  $u_2 = +V_{sat}$ .

**3.2.1** - Donner la valeur de  $u_3$ .

**3.2.2** - D est une diode au silicium ayant une résistance dynamique nulle et une tension de seuil  $U_{sd} = 0,6$  V. Calculer la valeur de  $u_5$  dans ces conditions.

**3.3** - On suppose que  $u_2 = -V_{sat}$ .

**3.3.1** - Donner la valeur de  $u_3$ .

**3.3.2** - Donner la valeur de  $u_5$ .

**3.4** - La tension de saturation de l'amplificateur est :  $V_{sat} = 12$  V. Le courant de sortie du circuit de mise en forme est limité à une intensité  $I_{smax} = 10$  mA. Le courant traversant le réseau  $R_2, R_3$  est négligeable vis à vis du courant circulant dans  $R_4$ .

Dans ces conditions, calculer les valeurs de  $R_4$  pour les deux valeurs possibles de  $u_2$ .

Quelle valeur doit-on retenir pour  $R_4$  ?

**3.5** - Pour que la tension soit stabilisée aux bornes de la diode Zener, le courant  $I_{dz}$  la traversant, est fixé à  $-5$  mA.

Calculer, dans ces conditions, la valeur de  $R_5$ . On considère que la suite du montage, non représentée sur le schéma, alimentée sous la tension  $u_5$ , ne consomme aucun courant.

Académie : \_\_\_\_\_ Session : \_\_\_\_\_

Examen ou Concours \_\_\_\_\_ Série\* : \_\_\_\_\_

Spécialité/option\* : \_\_\_\_\_ Repère de l'épreuve : \_\_\_\_\_

Épreuve/sous-épreuve : \_\_\_\_\_

NOM : \_\_\_\_\_

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : \_\_\_\_\_ N° du candidat

Né(e) le : \_\_\_\_\_

(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

\* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

Repère : TPSP

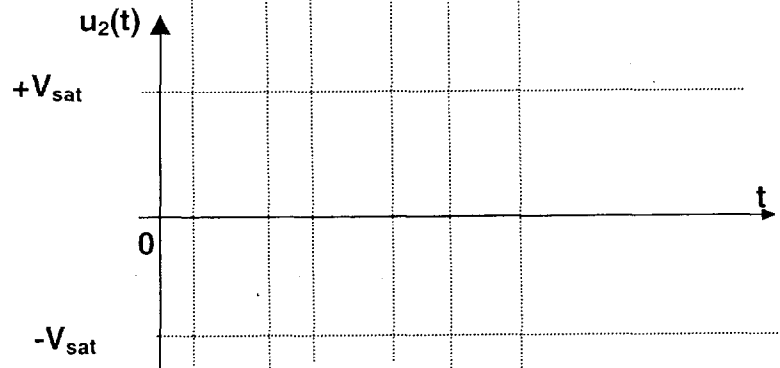
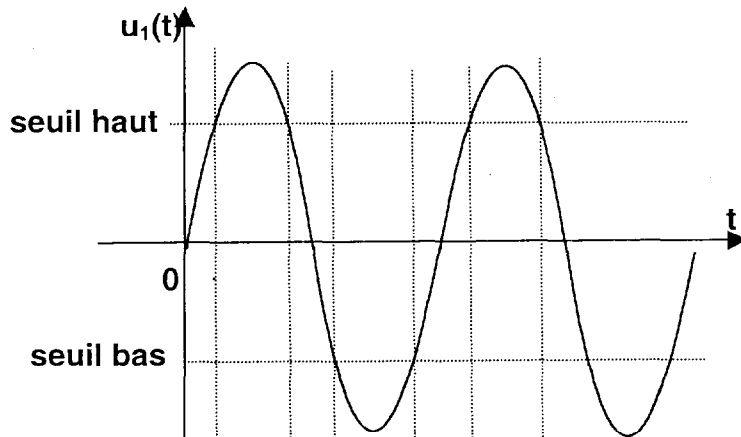
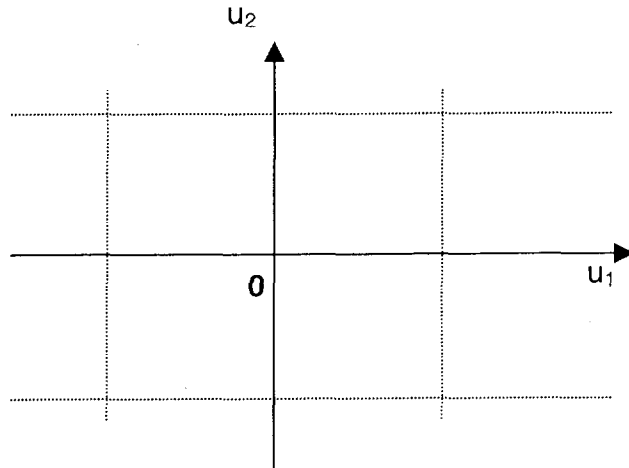
Session : 2004

Durée : 4 H

Page : 10/10

Coefficient : 4

**DOCUMENT REPONSE : à rendre impérativement avec la copie.**



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

---

**BTS : groupement A**

**CONTRÔLE INDUSTRIEL  
ET REGULATION AUTOMATIQUE**

**ELECTRONIQUE**

**ELECTROTECHNIQUE**

**GENIE OPTIQUE**

**INFORMATIQUE INDUSTRIELLE**

**TECHNIQUES PHYSIQUES  
POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE**

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

### 1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

### 2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

#### a) Limites usuelles

##### Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

##### Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

##### Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

**b) Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin $t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$e^t$	$e^t$	Arc tan $t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at}$ ( $a \in \mathbb{C}$ )	$ae^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

**c) Calcul intégral**

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

**d) Développements limités**

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

**e) Equations différentielles**

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où $G$ est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$ , $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$ , $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt} \dots$ où $r$ est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$ , $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant $\Delta$	

### 3. SERIES DE FOURIER

$f$ : fonction périodique de période  $T$ ;

développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad c_0 = a_0; \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

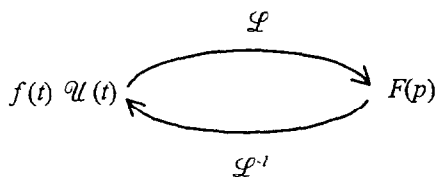
### 4. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}; \quad \mathcal{L}(t^n \mathcal{U}(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p+a}; \quad \mathcal{L}(\sin(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}(\cos(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Propriétés



$f(\alpha t) \mathcal{U}(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$f(t-\tau) \mathcal{U}(t-\tau)$	$F(p) e^{-\tau p}$
$f(t) e^{-at} \mathcal{U}(t)$	$F(p+a)$
$f'(t) \mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t) \mathcal{U}(t)$	$p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$
$-t f(t) \mathcal{U}(t)$	$F'(p)$
$\int_0^t f(u) \mathcal{U}(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$



5. TRANSFORMATION EN Z

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	Transformée en Z $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \frac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n, a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zf)(z) = \frac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n), a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n - n_0), (n - n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n - n_0) e(n - n_0)$	$(Zy)(z) = z^{-n_0} (Zx)(z)$
$y(n) = x(n+1)$	$(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0)]$
$y(n) = x(n+2)$	$(Zy)(z) = z^2[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$
$y(n) = x(n + n_0), n_0 \in \mathbb{N}^*$	$(Zy)(z) = z^{n_0} [(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \dots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}]$

6. PROBABILITES

a) Loi binomiale  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  où  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ;  $E(X) = np$ ;  $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

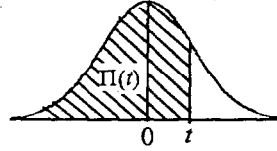
$k \backslash \lambda$	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

e) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE  $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota :  $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$