SESSION 2004

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Matériel autorisé :
Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).

Aucun document autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

Code sujet : CHMAT – P04

EXERCICE 1 : *(10 points)*

On étudie la cinétique, à 100°C, de la substitution de l'atome de chlore de l'acide monochloroacétique par OH^- selon la réaction :

$$\text{Cl-CH}_2\text{COO}^- + \text{OH}^- \longrightarrow \text{HO-CH}_2\text{COO}^- + \text{Cl}^-$$

- à l'instant t = 0, les concentrations des réactifs sont : $\left[\text{OH}^-\right]_0 = a$ et $\left[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-\right]_0 = \dfrac{a}{2}$ où a est un réel donné tel que $a > 0$
- de même à l'instant t, $\left[\text{OH}^-\right] = a - x(t)$ et $\left[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-\right] = \dfrac{a}{2} - x(t)$ avec $0 \leq x(t) < \dfrac{a}{2}$
- à l'instant t, le rendement de la réaction vaut $r(t) = \dfrac{x(t)}{a/2}$

On admet que la vitesse de la réaction est donnée par la relation :

$$v = \frac{dx}{dt} = k \cdot \left[\text{Cl-CH}_2\text{COO}^-\right] \cdot \left[\text{OH}^-\right]$$

où k est une constante liée à la réaction avec t s'exprimant en secondes.

PARTIE A : *Etude théorique*

1. Etablir l'équation différentielle, notée (E), liant $\dfrac{dx}{dt}$, x, a et k.
2. Trouver les constantes λ et μ, exprimées en fonction de a, telles que :

   pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{a}{2}\right[$ $\qquad \dfrac{2}{(a-x)(a-2x)} = \dfrac{\lambda}{a-x} + \dfrac{\mu}{a-2x}$

3. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$ est telle que : $\ln\left(\dfrac{a - x(t)}{a - 2x(t)}\right) = \dfrac{ak}{2}t$ où ln est la fonction logarithme népérien.
4. Montrer que $r(t) = \dfrac{2\left(1 - e^{At}\right)}{1 - 2e^{At}}$ où $A = \dfrac{ak}{2}$ et r désigne le rendement de la réaction.
5. On considère dans cette question que $A = 8 \cdot 10^{-4}$; déterminer alors le temps t (arrondi à la seconde) pour lequel le rendement $r(t)$ de la réaction est égal à 0,9.

PARTIE B : *Exploitation de résultats expérimentaux – détermination de k*

On donne a = 1,65 mol.L^{-1} . En posant $y(t) = \ln\left(\dfrac{a - x(t)}{a - 2x(t)}\right)$, on obtient les résultats expérimentaux suivants :

t (en secondes)	0	150	300	900	1200	1500	1800	2100	2400
$y(t)$	0	0,097	0,222	0,688	0,902	1,130	1,408	1,550	1,938

1. Déterminer l'équation de la droite des moindres carrées sous la forme : $y = mt + p$ où m et p sont des coefficients réels ; m sera donné avec une précision de 10^{-6} et p avec une précision de 10^{-3}.

2. En estimant que p est très proche de 0, et en utilisant le résultat de la modélisation de la 3$^{\text{è}}$ question de la partie A, déterminer une valeur approchée de la constante k de la réaction.

Exercice 2 : *(10 points) Etude expérimentale d'une colle à prise chimique*

Un fabricant met au point une nouvelle colle à prise chimique (par polymérisation). Durant la phase de collage, la résistance à la traction de la colle augmente de façon significative jusqu'à une valeur maximale. Le fabricant veut étudier la « durée de prise », c'est à dire la durée nécessaire pour que la résistance de la colle atteigne les trois quarts de sa valeur maximale.

Partie A

Le fabricant étudie l'influence de deux facteurs, la température et l'humidité ambiantes, sur la durée de prise de la colle.
Il note X_1 (resp. X_2) la variable qui associe au facteur température (resp. humidité) son niveau, et Y la durée de prise étudiée (exprimée en minutes).
Il procède à un plan d'expérience factoriel 2^2 dont les résultats figurent ci-dessous.

Tableau 1 :

Température X_1	Humidité X_2	Durée de prise Y (en min)
18°C	faible	11
22°C	faible	9
18°C	forte	10
22°C	forte	13

niveau	-1	+1
température	18°C	22°C
humidité	faible	forte

Le modèle retenu pour Y est un modèle polynomial du type :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_{12} X_1X_2 + \varepsilon$$

1) Reproduire et compléter la matrice complète des expériences et des effets, construite selon l'algorithme de Yates :

Expérience	Moyenne	X_1	X_2	$X_1 X_2$	Y
1					
2					
3					
4					
Effets	a_0	a_1	a_2	a_{12}	

2) Calculer les estimations ponctuelles des effets principaux et de l'interaction.
Ecrire l'équation du modèle de Y en fonction de X_1 et X_2.

3) Interprétation des effets :
   a. Peut-on négliger l'interaction ?
   b. A la température de 20°C (T = 0) comment varie la durée de prise lorsque l'humidité varie du niveau faible à fort ?

Partie B

Le fabricant effectue une deuxième campagne de mesures : il fait réaliser 100 collages indépendants, dans des conditions de température variables entre 18°C et 22°C. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Tableau 2 :

Durée de prise en minutes	[8,5;9[	[9;9,5[	[9,5;10[	[10;10,5[	[10,5;11[	[11;11,5[	[11,5;12[	[12;12,5[	[12,5;13[
Effectif	0	6	9	17	22	27	13	4	2

1) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type s de la série de mesures du tableau 2 (on donnera $\bar{x}$ à 0,01 près et s à 0,1 près).

2) On admet ici que la durée de prise est une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 0,8$.

   On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à une série quelconque de 100 collages indépendants associe sa durée moyenne de prise.

   Donner la loi de probabilité de $\overline{X}$ en fonction de μ et σ.

3) Le fabricant construit un test bilatéral pour tester l'hypothèse nulle H_0 : « $\mu = 10,75$ » au seuil de signification de 95% ; l'hypothèse alternative est donc H_1 : « $\mu \neq 10,75$ ».

   a) Sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 0,01 près du réel h telle que :
   $$P\left(\mu - h \leq \overline{X} \leq \mu + h\right) = 0,95.$$

   b) En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 95%.

   c) Enoncer la règle de décision du test.

   d) Appliquer le test à la série de mesures du tableau 2 et conclure.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle

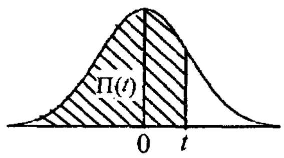
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$