BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
_«M.A.V.E.L.E.C.» et «M.R.I.M.»_
Session 2004

E1.B1 MATHEMATIQUES - U 12

Durée : 2 heures ***Coefficient : 2,5***

SOMMAIRE

Ce sujet comporte :

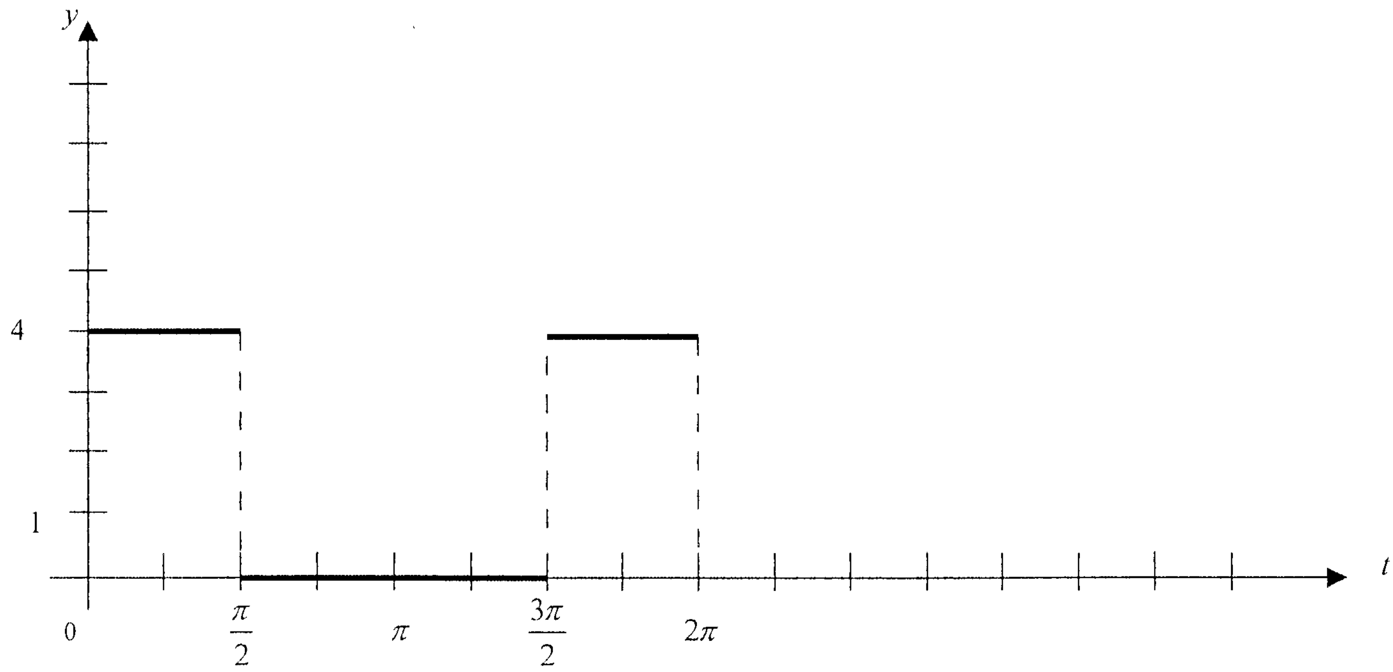
- *1 page de garde*
- *4 pages d'énoncé*
- *2 annexes à rendre avec la copie*
- *1 formulaire*

Précisez sur la copie d'examen le numéro des questions traitées

0409-MAV ST B
0409-MIR ST 12

EXERCICE 1 Polynôme de Fourier associé à un signal (8 points)

Un signal périodique s, de période $T = 2\pi$, est associé à une fonction f, définie sur IR, dont la courbe représentative sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ est donnée ci-dessous.



1) Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie), compléter le tableau donnant les valeurs constantes prises par $f(t)$.

2) Sur l'annexe 1, représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

3) a) A partir de cette représentation graphique, déterminer la parité de la fonction f.

b) Donner la valeur des coefficients b_n du polynôme de Fourier associé à ce signal. Justifier la réponse.

> RAPPEL :
> Le polynôme de Fourier d'ordre n associé au signal s est :
> $P(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + ... + a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)$ où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

4) Déterminer la valeur du coefficient a_0 donné par $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$.

5) On admet que l'amplitude a_1 du fondamental (harmonique de rang 1) est :

$$a_1 = \frac{4}{T}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que $a_1 = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer la valeur exacte de a_1.

6) On admet que les autres composantes du signal s sont données par la relation

$$a_n = \frac{8}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad \text{où } n > 1.$$

Calculer a_2 et a_3.

7) Ecrire le polynôme de Fourier d'ordre 3 associé à ce signal.

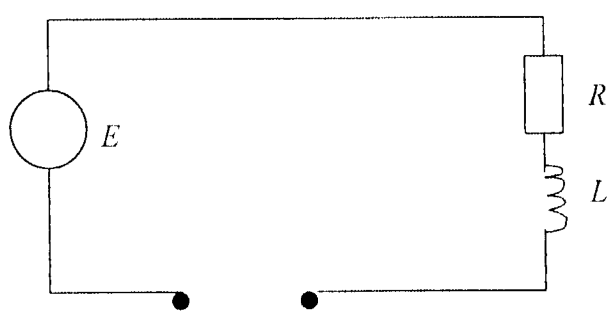
EXERCICE 2 <u>Calcul de la quantité d'électricité qui traverse un circuit électrique entre deux instants donnés (12 points)</u>

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante

<u>PARTIE A :</u>

L'intensité $i(t)$ qui parcourt le circuit électrique, lorsqu'on établit le courant dans un circuit comprenant un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et un dipôle résistif de résistance R, varie en fonction du temps t et vérifie l'équation différentielle (1) :

$$Li' + Ri = E \qquad (1)$$



1) Vérifier que la fonction constante $i_0 = \frac{E}{R}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (1).

2) L'équation différentielle "sans second membre" associée à (1) s'écrit $Li' + Ri = 0$ (2)
Ecrire cette équation différentielle (2) sous la forme : $y' - ay = 0$ figurant dans le formulaire, où a est une constante à déterminer.

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle "sans second membre" (2).

3) On admet que la solution générale de l'équation différentielle (1) est la somme d'une solution particulière de l'équation (1) et de la solution générale de l'équation "sans second membre" (2).
Ecrire la solution générale de l'équation différentielle (1).

4) L'intensité du courant dans le circuit est la solution de l'équation différentielle (1) vérifiant la condition initiale $i(0) = 0$.
Montrer que $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$.

5) Application numérique : $E = 12$ V ; $R = 10\ \Omega$; $L = 0{,}25$ H.
Donner l'expression de $i(t)$.

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 0,1] par $i(t) = 1{,}2(1 - e^{-40t})$

1) Sur l'annexe 1 compléter le tableau de valeurs de $i(t)$.
Arrondir les résultats au centième.

2) Déterminer $i'(t)$ où i' est la dérivée de la fonction i.

3) Déterminer le signe de $i'(t)$ sur l'intervalle [0 ; 0,1] ; en déduire le sens de variation de la fonction i sur l'intervalle [0 ; 0,1].

4) Tracer la courbe C dans le repère de l'annexe 2 où la tangente T à l'origine est tracée.

5) Calculer la quantité d'électricité Q, exprimée en coulomb, mise en jeu entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 0{,}1\,\text{s}$ à l'aide de la relation $Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,\mathrm{d}t$.

Donner le résultat arrondi à l'unité.

Donner une interprétation géométrique de cette intégrale par des hachures sur l'annexe 2.

ANNEXE 1

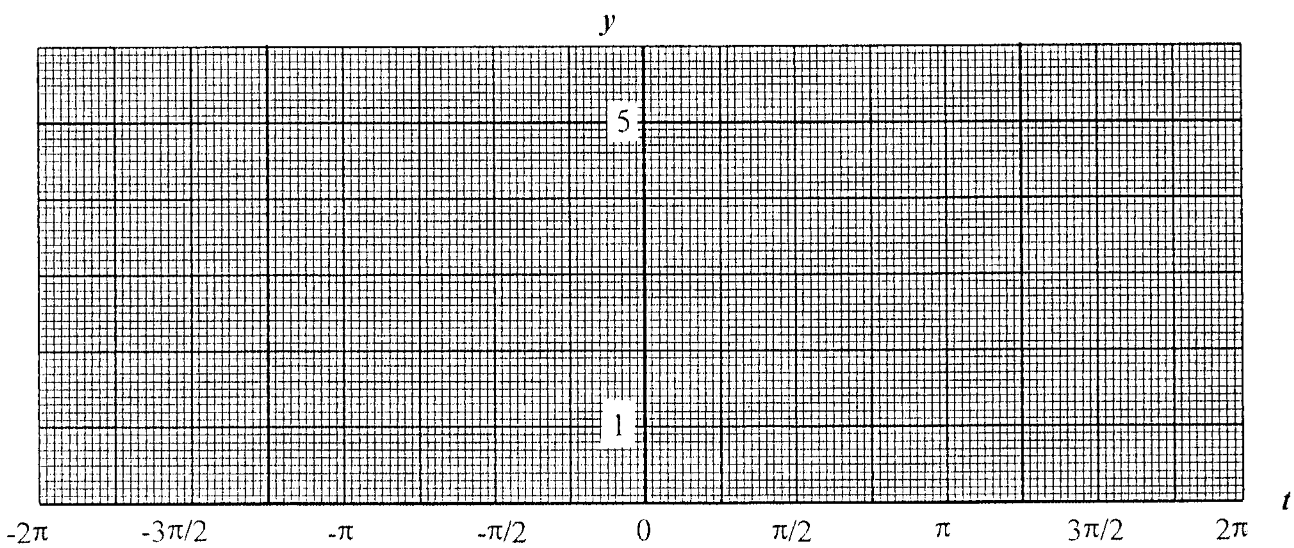
à rendre avec la copie

EXERCICE 1

1)

t	$[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$	$]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}[$	$[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi]$
$f(t)$			

2)



EXERCICE 2

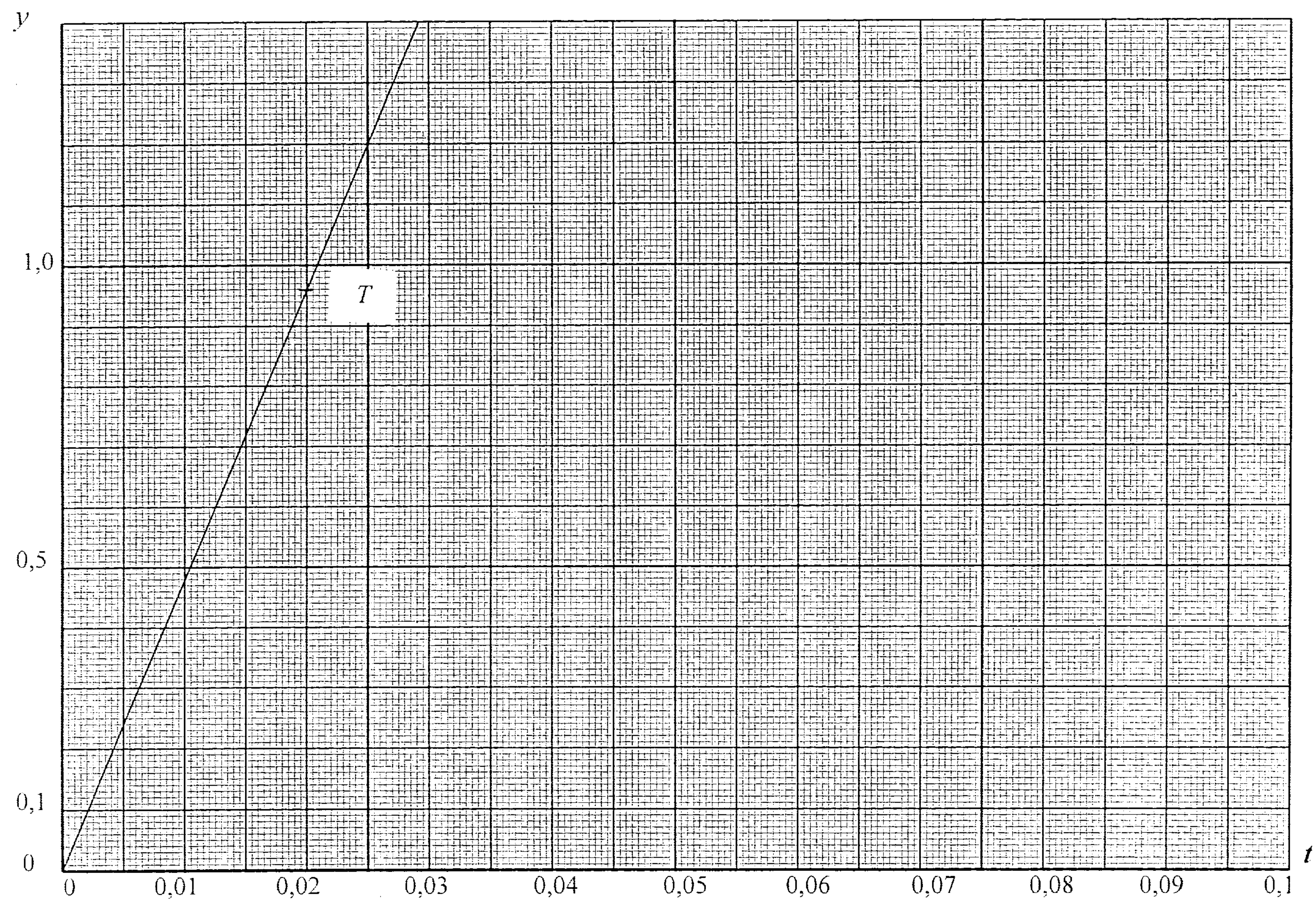
B - 1)

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$i(t)$	0	0,40			0,96		1,09	1,13	1,15	1,17	1,18

ANNEXE 2

à rendre avec la copie

B – 4)



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAUREAT PROFESSIONNEL

Secteur industriel : Métiers de l'électricité

(Arrêté du 9 mai 1995 - BO spécial n°11 du 15 juin 1995)

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Equation du second degré $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r

Terme de rang n : $u_n = u_1+(n-1)r$

Somme des k premiers termes :

$u_1+u_2+\cdots+u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n = u_1q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$u_1+u_2+\cdots+u_k = u_1\frac{1-q^k}{1-q}$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$ $\qquad \ln(a^n)=n\ln a$

$\ln(a/b)=\ln a-\ln b$

Equations différentielles

$y'-ay=0 \qquad y=ke^{ax}$

$y''+\omega^2y=0 \qquad y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$

Trigonométrie

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\cos 2a = 2\cos^2 a-1$

$= 1-2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

Nombres complexes ($j^2=-1$)

forme algébrique	forme trigonométrique
$z=x+jy$	$z=\rho(\cos\theta+j\sin\theta)$
$\bar{z}=x-jy$	$z=\rho(\cos\theta-j\sin\theta)$
$\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	$\rho=\lvert z\rvert$
	$\theta=\arg(z)$

Calcul vectoriel dans le plan

$\vec{v}.\vec{v}'=xx'+yy'$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Si $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}'\neq\vec{0}$:

$\vec{v}.\vec{v}'=\|\vec{v}\|\times\|\vec{v}'\|\cos(\vec{v},\vec{v}')$

$\vec{v}.\vec{v}'=0$ si et seulement si $\vec{v}\perp\vec{v}'$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ $\qquad$ Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$

Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh

Sphère de rayon R :

Aire : $4\pi R^2$ $\qquad$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3}Bh$

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$

* $\int_a^b (f+g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$
* $\int_a^b kf(t)\mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$