**_BACCALAUREAT PROFESSIONNEL_**
**_«M.A.V.E.L.E.C. » et «M.R.I.M.»_**
**_Session 2004_**

**_E1.B1 MATHEMATIQUES - U 12_**

**_Durée : 2 heures_** **_Coefficient : 2,5_**

# SOMMAIRE

*Ce sujet comporte :*

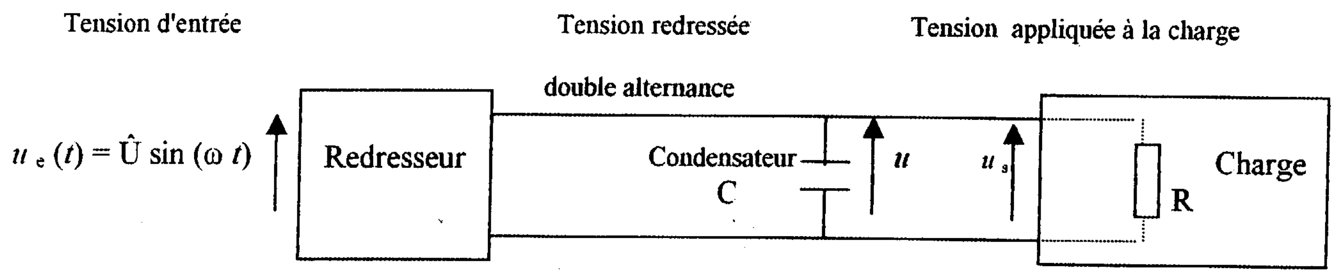
- *4 pages d'énoncé*
- *2 annexes à rendre avec la copie*
- *1 formulaire*

**_Précisez sur la copie d'examen le numéro des questions traitées_**

**0406-MAV ST B**
**0406-MIR ST 12**
**(Métropole - La Réunion)**

## EXERCICE 1 ( 10 points )

A la sortie d'un redresseur, on branche un condensateur en parallèle à la charge.




La tension $u_s(t)$ appliquée à la charge varie avec le temps $t$ : ses variations sont représentées graphiquement en **annexe 1**.
L'objectif de cet exercice est de préciser la variation de cette tension entre les instants 0 et 7,5 ms correspondant à un moment où le condensateur se décharge.

Dans la suite cette tension est notée plus simplement $u(t)$ et on admet que pour tout $t$ de l'intervalle [0 ; 0,0075] :

$$\mathrm{R}u'(t) + \frac{u(t)}{\mathrm{C}} = 0 .$$

où R est la résistance de la charge, C est la capacité du condensateur et $u'$ est la dérivée de la fonction $u$ .

***Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.***

### A. Résolution d'une équation différentielle

1. Sachant que R = 10 ohms et C = 2 $10^{-3}$ Farad, montrer que l'équation différentielle ci-dessus s'écrit :

$$u'(t) + 50\, u(t) = 0 \qquad \text{(E)}.$$

2.
   a. L'équation différentielle (E) est de la forme $u'(t) - a\, u(t) = 0$.
   Donner la valeur de la constante $a$ .

   b. En déduire la solution générale de l'équation (E).

3. Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $u(0) = 6$.

## B. Etude de fonction

Soit la fonction $u$ définie sur l'intervalle [0 ; 0,0075] par $u(t) = 6\ e^{-50t}$

1. Déterminer $u'(t)$, où $u'$ est la dérivée de la fonction $u$.

2. Déterminer, en le justifiant, le signe de $u'(t)$ sur l'intervalle [0 ; 0,0075].

3. En déduire le sens de variation de la fonction $u$ sur l'intervalle [0 ; 0,0075].

4.

   a. Calculer $u(0{,}007\,5)$.

   b. Résoudre l'équation $6\ e^{-50t} = 5$ en utilisant le logarithme népérien.
   Arrondir la solution à $10^{-4}$.

## C. Exploitation de la courbe représentée sur l'annexe 1.

1. Sur la représentation graphique de **l'annexe 1**, surligner en couleur la partie de la courbe correspondant à la représentation graphique de la fonction $u$.

2. Calculer $u'(0)$, le nombre dérivé de la fonction $u$ en $t_0 = 0$.

3. Déterminer une équation de la droite $(T)$, tangente à la courbe représentative de $u$ au point d'abscisse 0.

4. Tracer $(T)$ dans le repère de **l'annexe 1**.

5. Déterminer graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la droite $(T)$ avec l'axe des abscisses.
   Comparer la valeur trouvée avec la constante de temps RC.

## EXERCICE 2 ( 10 points)

Un signal périodique $s$ a pour période $T = 2\pi$.
Sa représentation graphique sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, donnée en **annexe 2** dans un repère orthogonal d'origine O, comprend :

- les segments de droite [OA], [DE] et [HI], extrémités comprises, situés sur l'axe des abscisses
- les segments [BC] et [FG], extrémités non comprises.

1.

   a. Calculer la pulsation $\omega$ du signal $s$, sachant que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

   b. Tracer la représentation graphique de $s$ sur l'intervalle $[-2\pi ; 0]$ dans **l'annexe 2.**

   c. A partir de la représentation graphique, justifier que la fonction $s$ est impaire.

   d. On admet que l'énergie moyenne transportée par le signal $s$ pendant une période est $E = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 4\,\mathrm{d}t$. Montrer que $E = 2$.

2. On rappelle que le polynôme de Fourier d'ordre 5 associé au signal $s$ est :

   $P_5(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \ldots + a_5 \cos(5\omega t) + b_5 \sin(5\omega t)$.

   a. Donner la valeur des coefficients $a_k$ où $0 \leq k \leq 5$. Justifier la réponse à l'aide d'un résultat de la question 1.

   b. Calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Donner la valeur exacte sachant que $\cos(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   c. Calculer $J = \displaystyle\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} -2\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Donner la valeur exacte.

   d. En déduire la valeur exacte du coefficient $b_1$ sachant que $b_1 = \dfrac{2}{T}(I + J)$.

3. On admet que le polynôme de Fourier d'ordre 5 du signal $s$ peut s'écrire :

$$P_5(t) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin(t) - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\sin(3t) - \frac{4\sqrt{2}}{5\pi}\sin(5t).$$

a. D'après la formule de Parseval, l'énergie moyenne transportée par le signal $P_5$ est :

$$E_5 = \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2).$$

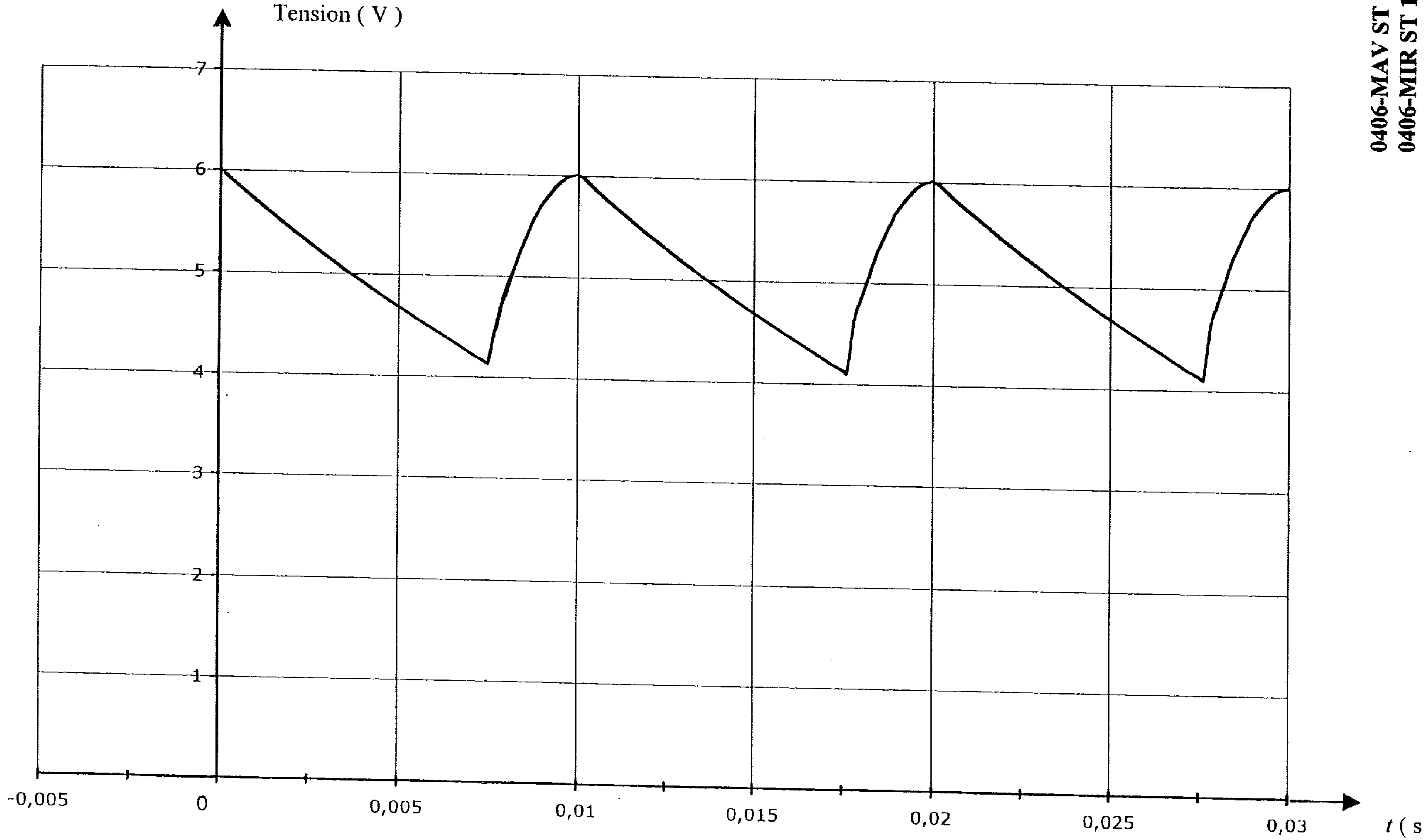
Calculer $E_5$. Arrondir le résultat à $10^{-3}$.

b. Exprimer en pourcentage le rapport $\frac{E_5}{E}$ sachant que la valeur E est donnée à la question 1.d.

c. L'approximation de $s$ par $P_5$ paraît-elle bonne ?

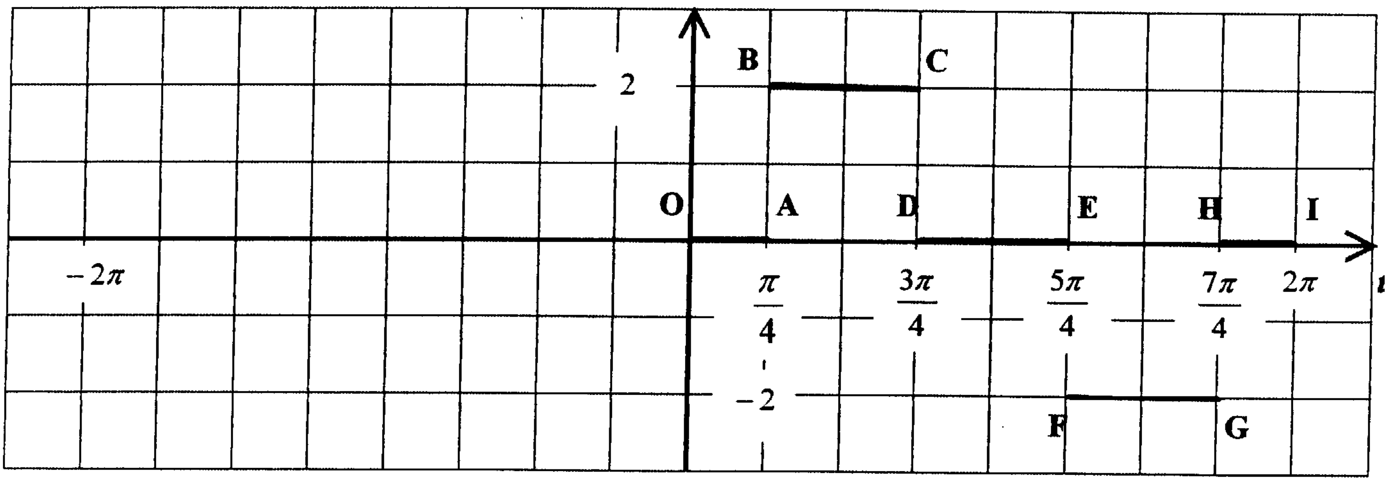
Indiquer un signal fournissant une meilleure approximation de $s$.

**ANNEXE 1**
A rendre avec la copie



**ANNEXE 2**
**A rendre avec la copie**

**EXERCICE 2 : Représentation graphique du signal *s***



**FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES BACCALAUREAT PROFESSIONNEL**
**Secteur industriel : Métiers de l'électricité**
(Arrêté du 9 mai 1995 - BO spécial n° 11 du 15 juin 1995

| Fonction f | Dérivée f' |
|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ |
| $ax+b$ | $a$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\ln x$ | $1/x$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $e^{ax+b}$ | $a\,e^{ax+b}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\sin(ax+b)$ | $a\cos(ax+b)$ |
| $\cos(ax+b)$ | $-a\sin(ax+b)$ |
| $u(x)+v(x)$ | $u'(x)+v'(x)$ |
| $a\,u(x)$ | $a\,u'(x)$ |
| $u(x)\,v(x)$ | $u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$ |
| $\frac{1}{u(x)}$ | $-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ |
| $\frac{u(x)}{v(x)}$ | $\frac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$ |

**Equation du second degré** $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

**Suites arithmétiques**

Terme de rang 1 : $u_1$ et raison r

Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des $k$ premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$$

**Suites géométriques**

Terme de rang 1 : $u_1$ et raison q

Terme de rang n : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Somme des $k$ premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = u_1\frac{1-q^k}{1-q}$$

**Logarithme népérien : ln**

$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln(a^n) = n\ln a$

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

**Equations différentielles**

$y' - ay = 0 \qquad y = k\,e^{ax}$

$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad y = a\cos\omega x + b\sin\omega x$

**Trigonométrie**

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$= 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

**Nombres complexes** ($j^2 = -1$)

| forme algébrique | forme trigonométrique |
|---|---|
| $z = x + jy$ | $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$ |
| $\bar{z} = x - jy$ | $\bar{z} = \rho(\cos\theta - j\sin\theta)$ |
| $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ | $\rho = \lvert z\rvert$ |
| | $\theta = \arg(z)$ |

**Calcul vectoriel dans le plan**

$\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy'$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$ :

$\vec{v}.\vec{v}' = \|\vec{v}\|.\|\vec{v}'\|\cos(\vec{v},\vec{v}')$ ;

$\vec{v}.\vec{v}' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}'$

**Aires dans le plan**

Triangle : $\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$

Disque : $\pi R^2$

**Aires et volumes dans l'espace**

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume : Bh.

Sphère de rayon R :

Aire : $4\pi R^2$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume : $\frac{1}{3}$ Bh.

**Calcul intégral**

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

* $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

* $\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$