SESSION 2005

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Matériel autorisé :
- Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).

Aucun document autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3, et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

Code sujet : CHMAT – N/05

Exercice 1 : (9 points)

Une entreprise fabrique des appareils de mesures qui doivent satisfaire à un cahier des charges.

Partie A

Une étude préalable a montré que 99% des appareils fabriqués sont conformes au cahier des charges. On choisit, au hasard et de façon non exhaustive (tirages avec remise), n appareils dans l'ensemble de la production.

1. On suppose dans cette question que $n = 10$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils conformes parmi les 10.
  a) Pourquoi X suit-elle une loi Binomiale ? Quels sont les paramètres de cette loi ?
  b) Déterminer la probabilité pour qu'il y ait au moins 9 appareils conformes parmi les 10 ; donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-3} près.

2. On suppose dans cette question que $n = 500$.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils non conformes parmi les 500.
On considère l'événement E : « le nombre d'appareils non conformes est supérieur ou égal à 6 »
  a) Pourquoi peut-on approcher la loi binomiale de la variable aléatoire Y par la loi de Poisson de paramètre 5 ?
  b) En utilisant cette approximation calculer la probabilité de l'événement E arrondie au centième.

Partie B

L'entreprise met en place un nouveau dispositif censé améliorer la fiabilité des appareils produits. Deux chaînes de fabrication sont mises en service : la chaîne n°1, sans nouveau dispositif et la chaîne n° 2 avec le nouveau dispositif. Afin de tester l'hypothèse selon laquelle le nouveau dispositif *améliore* de manière significative la fiabilité des appareils produits, on a prélevé de manière aléatoire 200 appareils à la sortie de chacune des deux chaînes de fabrication.
Un pourcentage p_1 (resp. p_2) d'appareils issus de la chaîne n°1 (resp. n°2) ont fonctionné parfaitement pendant les 3 premiers mois.

1.
  a) Expliquer pourquoi on met en place un test unilatéral.
  b) On prend pour hypothèse nulle $H_0 : p_1 = p_2$. Préciser l'hypothèse H_1 alternative qui va être opposée à l'hypothèse H_0.

On note F_1 (resp. F_2) la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille 200 provenant de la chaîne n°1 (resp. n°2) associe la fréquence f_1 (resp. f_2) d'appareils ayant parfaitement fonctionné pendant 3 mois.
Sur les deux échantillons prélevés, on a obtenu des valeurs observées qui sont : $f_1 = 87\%$ et $f_2 = 93\%$.
On note $D = F_2 - F_1$
Sous l'hypothèse nulle, les deux chaînes sont censées produire le même pourcentage p d'appareils conformes et la loi suivie par D (*celle que l'on adopte*) est la loi normale : $\mathcal{N}\left(0\,;\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{200}+\dfrac{p(1-p)}{200}}\right)$.

On prend $p = 0{,}9$ car $\left[p = \dfrac{f_1 + f_2}{2}\right]$.

2. Préciser les paramètres de la loi suivie par D.

3. Si α est le seuil de risque, on désigne par h_α le réel positif tel que : $P(D \leq h_\alpha) = 1 - \alpha$.
  a) On suppose dans cette question que $\alpha = 0{,}01$.
     Déterminer la valeur arrondie au centième h_α.
     Énoncer la règle de décision du test.
     Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,01.
  b) On suppose dans cette question que $\alpha = 0{,}05$.
     Déterminer h_α.
     Enoncer la règle de décision du test.
     Conclure quant à l'efficacité présumée du nouveau dispositif au seuil de risque 0,05.

Exercice 2 (11 points)

Le benzène, à l'état de vapeur, dilué dans un gaz inerte, réagit avec le dichlore.

Partie A

La réaction de chloration du benzène, dans certaines conditions, conduit à la formation de monochlorobenzène et de dichlorobenzène. On peut admettre que la concentration en dichlore est constante pendant toute la durée de la réaction (car cette concentration en dichlore est très grande par rapport à la concentration en benzène).

A l'instant t, exprimé en minute, on désigne par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les concentrations molaires respectives du benzène, du monochlorobenzène et du dichlorobenzène en micromole par litre.

A l'instant $t=0$, les concentrations molaires sont égales à : pour le benzène $[C_6H_6] = 0{,}2$
pour le monochlorobenzène $[C_6H_5Cl] = 0$
pour le dichlorobenzène $[C_6H_4Cl_2] = 0$.

On admet que les fonctions x, y et z sont solutions sur $[0, +\infty[$ du système différentiel (S) :

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) = -k_1 x(t) & :(\mathrm{E}_1) \\ y'(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t) & :(\mathrm{E}_2) \\ z'(t) = k_2 y(t) & :(\mathrm{E}_3) \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes de vitesse, $0 < k_1 < k_2$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
   b) Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0{,}2$.

2. a) Montrer que les solutions y du système (S) vérifient l'équation différentielle (E_4) :
$$y'(t) + k_2\, y(t) = 0{,}2\, k_1\, e^{-k_1 t}, \quad \text{avec } t \in [0, +\infty[.$$
   b) Déterminer le réel A de sorte que $t \mapsto \mathrm{A}e^{-k_1 t}$ soit solution de l'équation différentielle (E_4).
   c) Résoudre l'équation différentielle (E_4).
   d) Déterminer la solution de (E_4) vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

3. a) Vérifier que pour tout t supérieur ou égal à 0, on a : $x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$.
   b) En déduire la solution z du système (S) vérifiant les conditions initiales à l'instant $t = 0$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{0{,}2\, k_1}{k_2 - k_1} f(t).$$

1. a) Calculer la dérivée $f'(t)$.
   b) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution, qu'on notera t_m sur IR+. Exprimer t_m en fonction de k_1 et k_2.
   c) Étudier les variations de f sur IR+.
   d) En déduire que la fonction g admet un maximum en t_m.

2. Au cours d'une expérience on constate que le maximum de la fonction g est atteint à l'instant $t = 30$. Quelle relation peut-on déduire entre k_1 et k_2 ?

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \ u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle

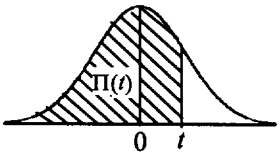
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$