

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR**Épreuve de Mathématiques****GROUPEMENT C***Durée : 2 heures*

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	1
Charpente-couverture	1,5
Communication et industrie graphique	2
Étude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux	2
Industries céramiques	2
Industries céréalières	2
Industries des matériaux souples (2 options)	1
Industries papetières	2
Mise en forme des alliages moulés	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique bois et ameublement	1,5
Productique textile (4 options)	3
Réalisation d'ouvrages chaudronnés	2
Systèmes constructifs bois et habitat	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Plus le formulaire de mathématiques page 1 à 5

Une feuille de papier millimétré sera distribuée avec la copie

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

CALCULATRICE AUTORISÉE

Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.

Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.

EXERCICE 1**(9 points)****Partie A**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x$ où y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbf{R} et y' sa dérivée.

- 1) Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E').
- 2) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g , définie pour tout x réel par $g(x) = ax + b$, soit une solution particulière de l'équation (E).
- 3) a) Résoudre l'équation différentielle (E).
b) Déterminer la fonction f , solution sur \mathbf{R} de l'équation différentielle (E) satisfaisant la condition : $f(0) = 0$.

Partie B

Soit la fonction f , définie pour tout x réel par $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

- 1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre $2x$ en facteur dans l'expression de $f(x)$).
- 2) Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur \mathbf{R} et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie C

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

- 1) Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$.
- 2) Construire la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} .
- 3) On considère l'aire \mathcal{A} du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calculer la valeur exacte de \mathcal{A} en cm^2 , puis en donner l'approximation décimale arrondie au centième.

EXERCICE 2**(11 points)**

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une entreprise produit en série des axes de moteurs électriques. Cette entreprise possède trois machines, que l'on appellera E, F et G. Chaque axe est produit par l'une de ces trois machines.

Partie A

Les machines E, F et G produisent respectivement 25 %, 35 % et 40 % de la production totale.

On constate, un jour donné de production, que les machines E, F et G produisent respectivement 1,5 %, 2,5 % et 3 % d'axes défectueux.

Montrer que la probabilité de prélever au hasard un axe défectueux dans la production totale de l'entreprise de ce jour est de 0,0245.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine E.

La machine E se dérèglant au cours du temps, on décide de noter chaque jour le pourcentage des axes défectueux produits. On obtient alors le tableau suivant :

Jours x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentages d'axes défectueux y_i	0,8	1,1	1,9	2,3	2,1	2,4	2,8	2,9

- 1) Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. (Les résultats seront arrondis à 10^{-3}).
- 2) En admettant que l'évolution du pourcentage d'axes défectueux constatée pendant huit jours se poursuive les jours suivants, quel est le pourcentage prévisible, arrondi à 0,1%, d'axes défectueux produits le onzième jour par la machine E ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine F.

La machine F produit 2,5 % d'axes défectueux. On prélève au hasard, dans la production de la machine F, un lot de 50 axes. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 axes de moteurs électriques, associe le nombre d'axes défectueux.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y . Justifier la réponse.
- 2) Calculer la probabilité que le lot contienne exactement deux axes défectueux (le résultat sera arrondi à 10^{-3}).

Partie D

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine G.

La machine G est bien réglée si, dans la production d'une journée, la moyenne des longueurs des axes est de 350 millimètres.

Pour vérifier le réglage de la machine G on construit un test d'hypothèse bilatéral au risque de 5 % .

- 1)
 - a) Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?
 - b) On note \bar{X} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 axes prélevés dans la production de la machine G associe la moyenne des longueurs de ces axes. La production de la machine G est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On suppose que, sous l'hypothèse nulle H_0 , la variable aléatoire \bar{X} suit la loi normale de moyenne 350 et d'écart-type 0,5.
Sous l'hypothèse H_0 , déterminer le réel h tel que : $P(350 - h \leq \bar{X} \leq 350 + h) = 0,95$.
 - c) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
- 2) On prélève un échantillon aléatoire de 100 axes et on constate que la moyenne des longueurs des axes de cet échantillon est de 349. Peut-on au risque de 5 %, conclure que la machine G est bien réglée ?

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

B.T.S. : groupement C

AGROÉQUIPEMENT

CHARPENTE-COUVERTURE

COMMUNICATION ET INDUSTRIE GRAPHIQUE

**ÉTUDE ET RÉALISATION D'OUTILLAGES DE MISE EN FORME DES
MATÉRIAUX**

INDUSTRIES CÉRAMIQUES

INDUSTRIES CÉRÉALIÈRES

INDUSTRIES DES MATÉRIAUX SOUPLES (2 OPTIONS)

INDUSTRIES PAPETIÈRES

MISE EN FORME DES ALLIAGES MOULÉS

MISE EN FORME DES MATÉRIAUX PAR FORGEAGE

PRODUCTIQUE BOIS ET AMEUBLEMENT

PRODUCTIQUE TEXTILE (4 OPTIONS)

RÉALISATION D'OUVRAGES CHAUDRONNÉS

SYSTÈMES CONSTRUCTIFS BOIS ET HABITAT

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{a+ib} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin t	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	Arc tan t	$\frac{1}{1+t^2}$
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} ($a \in \mathbb{C}$)	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^a)' = a u^{a-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t) x' + b(t) x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

c) Loi exponentielle

Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ (M.T.B.F.)}$$

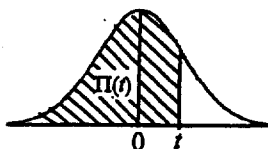
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$