BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
« M .A.V.E.L.E.C » « M.R.I.M. »
Session 2005

E1.B1 MATHEMATIQUES - U 12

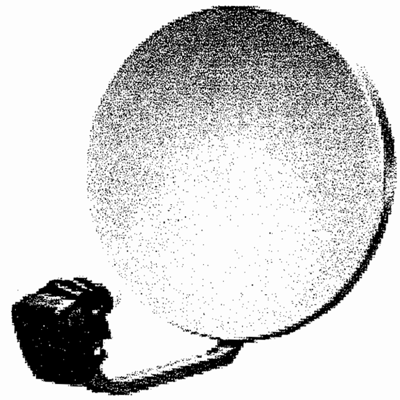
Durée : 2 heures **Coefficient : 2,5**

SOMMAIRE

Ce sujet comporte
- *3 pages d'énoncé*
- *2 annexes à rendre avec la copie*
- *1 formulaire*

0506-MAV ST B
0506-MIR ST 12

Une antenne parabolique permet de capter des signaux grâce à un dispositif appelé tête, placé en un point appelé foyer de la parabole.



Exercice 1 : La parabole (9 points)

Un arc de parabole est représenté dans le repère de **l'annexe 1** : il a pour extrémités les points A (– 3 ; 1,125) et B (3 ; 1,125).

A – Equation de la parabole

On admet que la parabole a une équation de la forme $y = a\,x^2$ où a est une constante.
1. Déterminer la valeur de la constante a en utilisant les coordonnées du point B de la parabole. Donner alors l'équation de la parabole.

2. Vérifier par le calcul que le point C de coordonnées (2 ; 0,5) appartient à la parabole.

B – Tangente *T* à la parabole au point C

On admet que la parabole de **l'annexe 1** est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [–3 ; 3] par $f(x) = 0{,}125\,x^2$.
1. Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.

2. Pour quelle valeur x_0 la dérivée est-elle nulle ?

   En déduire la tangente au point de la courbe d'abscisse x_0.

3. Montrer que la tangente T à la parabole au point C (2 ; 0,5) a pour équation $y = 0{,}5\,x - 0{,}5$.

4. Tracer la tangente T dans le repère de **l'annexe 1**.

C – Foyer F de la parabole

1. Justifier que le point d'intersection K de la tangente T et de l'axe des abscisses a pour coordonnées (1 ; 0).

2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KC}$.

3. Soit F le point d'intersection de la perpendiculaire à la tangente T passant par K et de l'axe des ordonnées. Déterminer graphiquement les coordonnées du point F.

4. On veut déterminer par le calcul l'ordonnée y du point F.
   4.1. – Sans calcul de produit scalaire, justifier que $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KF} = 0$.
   4.2. – Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KF}$ en fonction de l'ordonnée y du point F.
   4.3. – Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KF}$ est égal à $-1 + 0{,}5y$.
   4.4. – En déduire l'ordonnée y du point F.

D – Aire sous la parabole

1. Colorier, dans le repère de **l'annexe 1**, la partie du plan dont l'aire correspond à l'intégrale $I = \int_0^3 0{,}125x^2 \, dx$.
2. Calculer I.

<u>Exercice 2 : Gain de la parabole</u> (3 points)

Le gain de la parabole peut se calculer avec la formule ci-dessous :

$$G = 10 \log \left(0{,}5\left(\frac{\pi D f}{c}\right)^2 \right)$$

où G est le gain en dB,
D est le diamètre en m,
f est la fréquence d'utilisation en Hz,
c est la célérité de la lumière égale à 3.10^8 m/s,
log est le logarithme décimal.

1. Calculer le gain de la parabole si D = 60 cm et $f = 9.10^9$ Hz. Arrondir à 10^{-2}.

2. A partir de quelle fréquence peut-on utiliser une telle parabole sachant que le gain doit être supérieur ou égal à 20 dB? Arrondir la fréquence à 10^7 Hz.

<u>Exercice 3 : Adaptation d'impédance</u> (8 points)

L'antenne est reliée à une ligne de transmission. Le rapport d'ondes stationnaires appelé *ROS* exprime la désadaptation d'impédance entre les deux. Si l'adaptation d'impédance n'est pas parfaite, il y a réflexion d'une partie plus ou moins importante de l'énergie, caractérisée par le coefficient de réflexion ρ.

On admet la relation : $ROS = \frac{1+\rho}{1-\rho}$.

On se propose d'étudier les variations du *ROS* en fonction de ρ à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1[par :

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer en utilisant le formulaire que :
$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

2. Déterminer le signe de $f'(x)$.

3. En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. Compléter le tableau de valeurs de **l'annexe 1**. Arrondir les valeurs à 0,1.

5. Tracer la courbe représentative de f dans le repère de **l'annexe 2**.

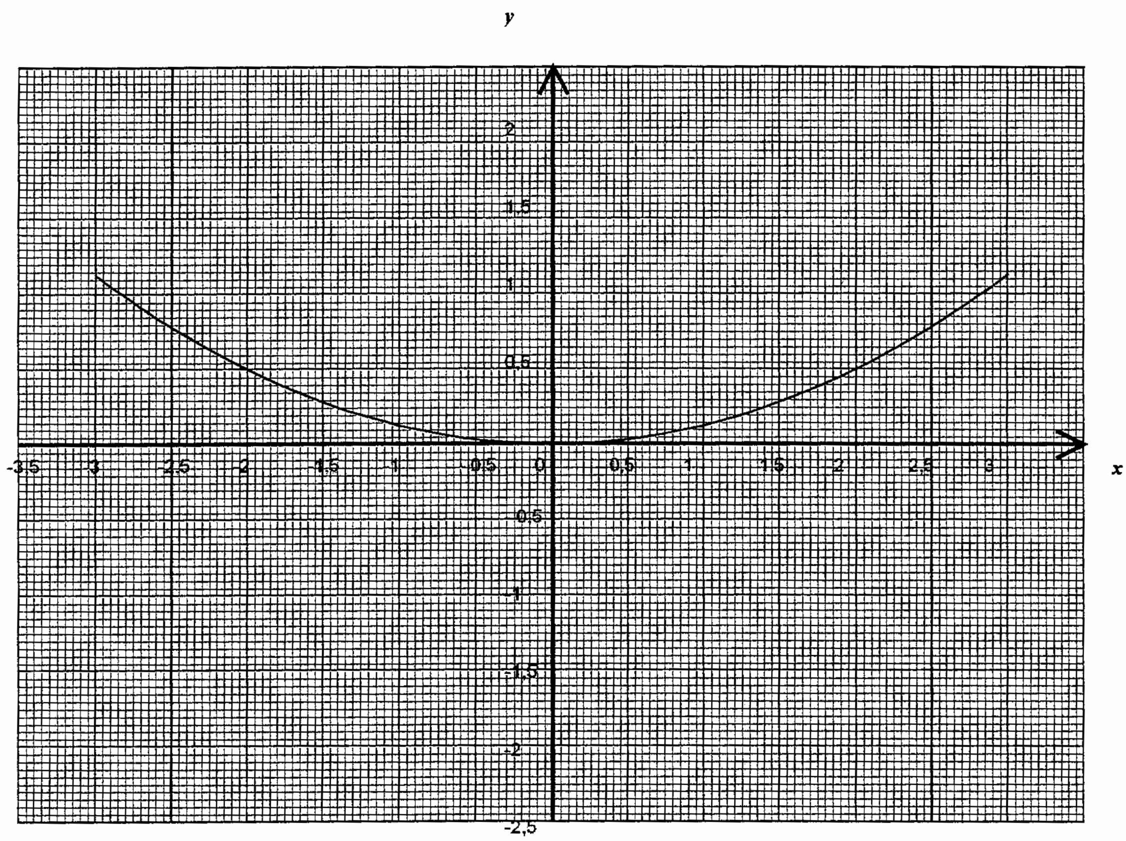
6.
   a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 10$.

   b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 10$. Arrondir la solution au millième.

   c. A l'aide d'une phrase faisant intervenir le rapport d'onde stationnaire *ROS* et le coefficient de réflexion ρ, traduire le résultat obtenu à la question 6.a. ou à la question 6.b..

ANNEXE 1
à rendre avec la copie

Exercice 1:



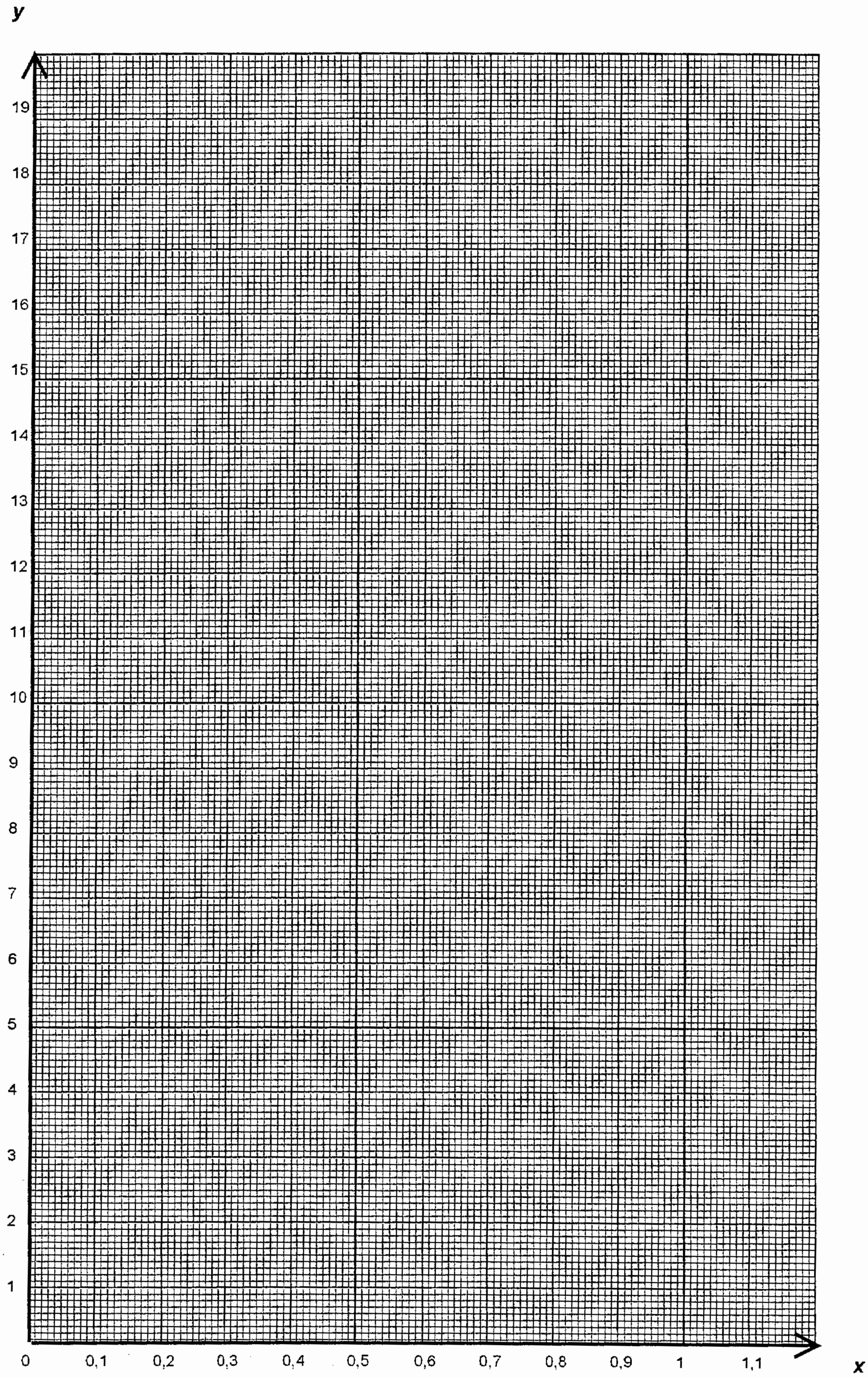
Exercice 3:

5. Tableau de valeurs:

x	0	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9
$f(x)$			3		9	

ANNEXE 2

A rendre avec la copie



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAUREAT PROFESSIONNEL

Secteur industriel : Métiers de l'électricité

(Arrêté du 9 mai 1995 - BO spécial n°11 du 15 juin 1995)

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Equation du second degré $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r

Terme de rang n : $u_n=u_1+(n-1)r$

Somme des k premiers termes :

$$u_1+u_2+\cdots+u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n=u_1q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$$u_1+u_2+\cdots+u_k = u_1\frac{1-q^k}{1-q}$$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$ $\quad$ $\ln(a^n)=n\ln a$

$\ln(a/b)=\ln a-\ln b$

Equations différentielles

$y'-ay=0$ $\qquad$ $y=ke^{ax}$

$y''+\omega^2y=0$ $\qquad$ $y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$

Trigonométrie

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\cos 2a = 2\cos^2 a-1$

$\qquad = 1-2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

Nombres complexes $(j^2=-1)$

forme algébrique	forme trigonométrique
$z=x+jy$	$z=\rho(\cos\theta+j\sin\theta)$
$\bar{z}=x-jy$	$z=\rho(\cos\theta-j\sin\theta)$
$\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	$\rho=\lvert z\rvert$
	$\theta=\arg(z)$

Calcul vectoriel dans le plan

$\vec{v}.\vec{v}'=xx'+yy'$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Si $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}'\neq\vec{0}$:

$\vec{v}.\vec{v}'=\|\vec{v}\|\times\|\vec{v}'\|\cos(\vec{v},\vec{v}')$

$\vec{v}.\vec{v}'=0$ si et seulement si $\vec{v}\perp\vec{v}'$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ $\qquad$ Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$

Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh

Sphère de rayon R :

Aire : $4\pi R^2$ $\qquad$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3}Bh$

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt$$

* $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$

* $\displaystyle\int_a^b kf(t)\,dt=k\int_a^b f(t)\,dt$