BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2006

****

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Le sujet comprend 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (8 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + 2y' + 5y = -5x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \ ,$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur R , y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $\quad y'' + 2y' + 5y = 0$.

2° Montrer que la fonction g définie sur R par $g(x) = -x^3 + 2x^2 - x$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Etude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin 2x - x^3 + 2x^2 - x$.

1° À l'aide du développement limité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$, à l'ordre 3 au voisinage de 0, écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

2° Écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \sin 2x$.

3° En déduire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \sin 2x$.

4° En déduire que le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction f est :

$f(x) = x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

5° Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse zéro.

6° Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

EXERCICE 2 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une usine fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces métalliques pour l'industrie.

A. Probabilités conditionnelles

Les pièces sont produites dans deux ateliers appelés « atelier 1 » et « atelier 2 ».
L'atelier 1 produit chaque jour 250 pièces et l'atelier 2 produit chaque jour 750 pièces.
On admet que 1% des pièces produites par l'atelier 1 sont défectueuses et que 2 % des pièces produites par l'atelier 2 sont défectueuses.
On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des 1000 pièces produites par les deux ateliers pendant une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
On considère les événements suivants :
A : « la pièce prélevée provient de l'atelier 1 » ;
B : « la pièce prélevée provient de l'atelier 2 » ;
D : « la pièce prélevée est défectueuse ».

1° Déduire des informations figurant dans l'énoncé $P(A)$, $P(B)$, $P(D/A)$ et $P(D/B)$.
(On rappelle que $P(D/A) = P_A(D)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.)

2° Calculer $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.

3° En déduire la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse.

B. Loi binomiale

Dans cette question, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

On considère un stock important de pièces de ce modèle.
On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0{,}02$.
On prélève au hasard dix pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de dix pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de dix pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1° Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° Calculer la probabilité qu'aucune pièce de ce prélèvement ne soit défectueuse.

3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.

EXERCICE 3 (7 points)

On envisage de créer une nouvelle police de caractère. On s'intéresse plus précisément à la lettre P et on utilise des courbes de Bézier pour définir les contours de cette lettre.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ d'unité graphique 2 centimètres.

1° On souhaite construire la courbe de Bézier C_1 définie par les points de définition suivants donnés par leurs coordonnées : $A_0(0, 3)$; $A_1(4, 3)$; $A_2(4, 6)$ et $A_3(0, 6)$.
On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition A_i $(0 \leq i \leq n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{0}^{n} B_{i,n}(t)\ \overrightarrow{OA_i} \quad \text{où} \quad B_{i,n}(t) = C_n^i\ t^i\ (1-t)^{n-i}.$$

a) Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,3}(t)$, avec $0 \leq i \leq 3$.

b) On note $(f_1(t), g_1(t))$ les coordonnées du point $M_1(t)$ de la courbe C_1.
Vérifier que, pour tout t de $[0, 1]$, $f_1(t) = 12t - 12t^2$.
On admettra dans la suite de l'exercice que $g_1(t) = 3 + 9t^2 - 6t^3$.

Un système d'équations paramétriques de la courbe C_1 est donc :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 12t - 12t^2 \\ y = g_1(t) = 3 + 9t^2 - 6t^3 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

c) Étudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0, 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d) Préciser les coordonnées des points de C_1 où les tangentes à C_1 sont parallèles à l'axe des abscisses.

e) Tracer la courbe C_1 et les tangentes parallèles aux axes sur une feuille de papier millimétré.

2° Soit C_2 une courbe de Bézier définie par les trois points de définition suivants donnés par leurs coordonnées : $A_0(0, 3)$; $A_4(0, \frac{1}{4})$; $A_5(-2, 0)$.

La courbe C_2 est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -2t^2 \\ y = g_2(t) = 3 - \frac{11}{2}t + \frac{5}{2}t^2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

Le tableau des variations conjointes de f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		1
$f_2'(t)$	0	$-$	-4
$f_2(t)$	0	$\searrow$	-2
$g_2'(t)$	$-\frac{11}{2}$	$-$	$-\frac{1}{2}$
$g_2(t)$	3	$\searrow$	0

a) Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe C_2 au point A_5.
Quelle est la tangente à la courbe C_2 en A_0 ?

b) Tracer la courbe C_2 dans le même repère que la courbe C_1. Construire la tangente à la courbe C_2 en A_5 ainsi que le point A_4 et le segment A_0A_3.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(k u)' = k u'$$

$$(uv)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \ u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. ***PROBABILITES***

a) **Loi binomiale** $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

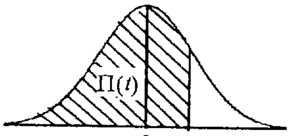
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$