

**SESSION 2006**

**BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR  
CHIMISTE**

**Mathématiques**

**Durée : 2 heures  
Coefficient : 3**

**Matériel autorisé :**

- Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).

**Aucun document autorisé.**

**Document à rendre avec la copie : Feuille annexe recto-verso des réponses (pages 5/6 et 6/6).**

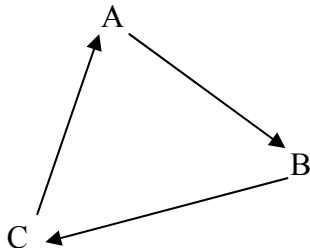
**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**

**Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6, (y compris feuille annexe) et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).**

**Code sujet : CHMAT - P-06**

## Exercice 1 (10 points)

On considère trois réactions d'ordre 1 formant le cycle suivant :



On désigne par  $x$ ,  $y$  et  $z$  les concentrations en  $\text{mol.L}^{-1}$  à l'instant  $t$  des produits  $A$ ,  $B$  et  $C$  ( $t$  exprimé en minutes). Sachant qu'à chaque instant  $t$ , on a :  $x + y + z = 3$ , les lois cinétiques donnent, en remplaçant  $z$  par  $3 - x - y$ , les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y + 3 & (1) \\ \frac{dy}{dt} = -y + x & (2) \\ z = 3 - x - y & (3) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :  $x(0) = 3$ ,  $y(0) = z(0) = 0$ .

Les deux premières équations permettent d'établir une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants ( $E_1$ ) vérifiée par  $x$  :

$$(E_1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 3x = 3$$

On rappelle que  $\frac{d^2x}{dt^2}$  est la dérivée seconde de la fonction  $x$  et que  $\frac{dx}{dt}$  est la dérivée de la fonction  $x$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation du second degré d'inconnue  $r$  suivante :

$$(E_c) \quad r^2 + 3r + 3 = 0$$

2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$(E_0) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

3. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle du second ordre ( $E_1$ ).

4. En utilisant les résultats précédents, donner la solution générale de l'équation différentielle ( $E_1$ ).

5. En utilisant l'équation (1), calculer la valeur prise par la dérivée de la fonction  $x$  en zéro :  $x'(0)$ .

6. Montrer que la solution de l'équation différentielle ( $E_1$ ) qui vérifie les conditions initiales est la fonction  $x$  définie pour  $t \geq 0$  par :

$$x(t) = 1 + 2e^{-1,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

7. Calculer la dérivée de la fonction  $x$ . En déduire l'expression de la fonction  $y$ .
8. Déterminer la fonction  $z$  en utilisant l'équation (3).
9. Calculer, en les justifiant, les limites de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice 2 (10 points)

### Partie A

On produit du styrène par déshydrogénation catalytique de l'éthylbenzène. Pour étudier le rendement de cette production, on réalise un plan d'expérience  $2^3$  complet, construit selon l'algorithme de Yates. Les trois facteurs sont :

$X_1$  : la nature du catalyseur ;  $X_2$  : la température ;  $X_3$  : le rapport molaire vapeur d'eau / éthylbenzène.

En fonction du domaine expérimental, on attribue les niveaux suivants à chacun des facteurs :

niveau	- 1	+ 1
$X_1$ : catalyseur	$C_1$	$C_2$
$X_2$ : température	800 K	1000 K
$X_3$ : rapport molaire	4/1	9/1

On réalise huit expériences dont les résultats sont donnés par le tableau suivant :

expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
catalyseur	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
température	800 K	800 K	1000 K	1000 K	800 K	800 K	1000 K	1000 K
rapport molaire	4/1	4/1	4/1	4/1	9/1	9/1	9/1	9/1
rendement (%)	46	40	92	80	48	42	95	85

Le modèle retenu pour le rendement  $Y$  est un modèle polynomial de la forme :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_{12} X_1 X_2 + a_{13} X_1 X_3 + a_{23} X_2 X_3 + a_{123} X_1 X_2 X_3 + \varepsilon.$$

**Les réponses concernant cette partie A seront données sur la feuille Annexe (recto-verso) qui sera jointe à la copie.**

1. Compléter la matrice complète des expériences et des effets, ci-jointe en annexe ; calculer une estimation ponctuelle de chacun des coefficients du modèle.
2. Si on considère qu'un effet dont l'estimation ponctuelle est inférieure à 1% est non significatif, donner l'expression du modèle.
3. La représentation graphique de l'effet du facteur  $X_1$  est donnée par le graphique ci-joint en annexe. Justifier les valeurs de  $Y$  données sur le graphique en annexe.  
Quel est l'effet global du facteur  $X_1$  ?  
Quelle conclusion peut-on en tirer afin d'obtenir le meilleur rendement ?

### Partie B

On utilise le styrène dans la fabrication du polystyrène. A la fin de la chaîne de transformation un broyeur délivre le polystyrène en granulés. Afin de contrôler la granulométrie, on prélève un échantillon de 100 granulés et on mesure leur diamètre, en millimètre. La moyenne  $m$  et l'écart type  $s$  de cet échantillon sont tels que  $m = 4,63$  et  $s = 0,15$ .

1. Cet échantillon étant assimilé à un échantillon non exhaustif, déduire des résultats obtenus pour cet échantillon une estimation ponctuelle (à  $10^{-2}$  près) de la moyenne  $\mu$  et de l'écart type  $\sigma$  des diamètres des granulés délivrés par ce broyeur.

Dans la suite de l'exercice on considérera que la valeur de l'écart type  $\sigma$  est l'estimation ponctuelle obtenue.

2. On suppose que la variable aléatoire  $\bar{X}$  qui, à tout échantillon non exhaustif de taille  $n = 100$ , associe la moyenne des diamètres des granulés de cet échantillon suit une loi normale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
3. Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne des diamètres  $\mu$  avec un coefficient de confiance égal à 95 %.

**Annexe : Exercice II – Partie A**  
*Feuille des réponses (recto-verso) à joindre à la copie*

1. Matrice des effets :

Expérience	Moyenne	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1X_2$	$X_1X_3$	$X_2X_3$	$X_1X_2X_3$	Y observé
1									46
2									40
3									92
4									80
5									48
6									42
7									95
8									85
Estimation des effets	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{23}$	$a_{123}$	

Calcul des estimations ponctuelles des effets :

$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_{12} =$$

$$a_{13} =$$

$$a_{23} =$$

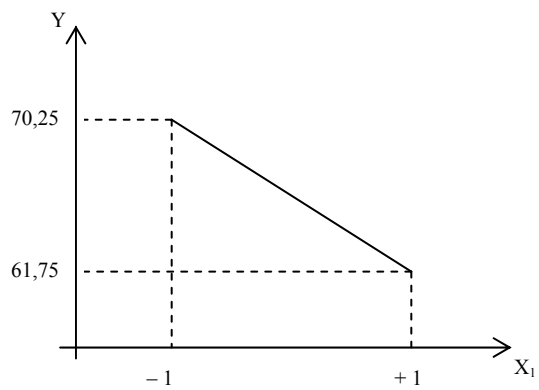
$$a_{123} =$$

2. Expression du modèle :

$$Y =$$

*Feuille des réponses (suite)*

3. Représentation graphique de l'effet du facteur  $X_1$  :



Interprétation et conclusion :