

**BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR EN  
ÉLECTROTECHNIQUE**

**E4 - Physique Appliquée  
à l'électrotechnique**

*Durée : 4 heures*

*coefficient : 3*

**Calculatrice autorisée**

# Motorisation d'un tramway

*Ce problème est constitué de trois parties indépendantes.*

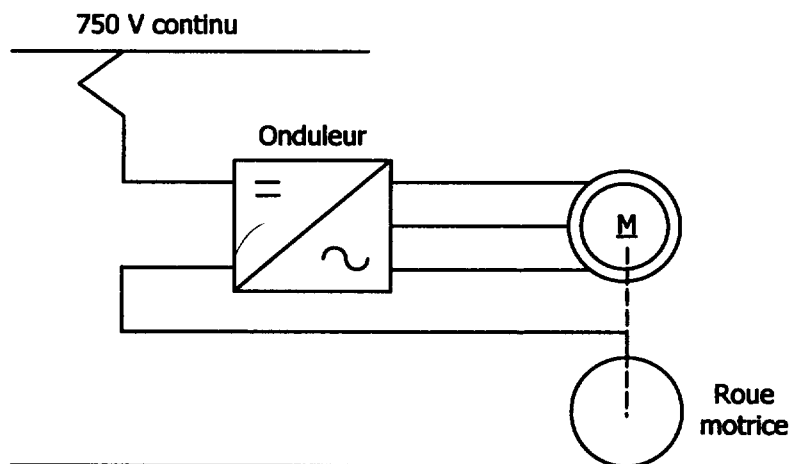
## Présentation

Ces dernières années ont vu la percée du moteur asynchrone dans le domaine de la traction électrique. Dans le même temps, afin de réduire la pollution engendrée par la circulation automobile, de nombreuses villes ont développé les transports en commun, en optant souvent pour la solution du tramway.

Ce problème se propose d'étudier un exemple de chaîne de motorisation asynchrone pour tramway.

Chaque rame du tramway étudié comporte douze moteurs asynchrones entraînant douze roues motrices réparties sur trois bogies. Ces moteurs de traction sont alimentés par l'intermédiaire d'onduleurs de tension à partir d'un réseau 750 V continu.

Le synoptique de l'alimentation d'un moteur de traction est donné figure 1.



**Figure 1**

*Les lettres minuscules représentent les valeurs instantanées des grandeurs électriques, les lettres majuscules représentent les valeurs efficaces ou continues.*

*On associe à une grandeur  $s(t)$  sinusoïdale, la grandeur complexe  $S(j\omega)$  et le vecteur de Fresnel  $\vec{S}$ .*

## **- Partie A - Étude d'un moteur de traction**

Il s'agit d'un moteur asynchrone triphasé à rotor à cage dont les enroulements statoriques sont couplés en étoile.

### **Caractéristiques nominales du moteur**

- Tension nominale entre phases :  $U_N = 585 \text{ V}$
- Fréquence statorique nominale :  $f_N = 88 \text{ Hz}$
- Intensité nominale du courant statorique :  $I_N = 35,4 \text{ A}$
- Facteur de puissance nominal :  $\cos\varphi_N = 0,732$
- Fréquence nominale de synchronisme :  $N_S = 2640 \text{ tr.min}^{-1}$
- Fréquence nominale de rotation du rotor :  $N_N = 2610 \text{ tr.min}^{-1}$

Dans ce qui suit, on néglige :  
- les résistances et inductances de fuites statoriques ;  
- les pertes dans le fer ;  
- les pertes mécaniques.

### **A.1 - Etude du fonctionnement nominal du moteur**

**A.1.1** - Déterminer le nombre  $p$  de paires de pôles du moteur sachant que la fréquence statorique nominale est  $f_N = 88 \text{ Hz}$ .

Pour le point nominal de fonctionnement :

**A.1.2** - Calculer le glissement  $g_N$ .

**A.1.3** - Calculer la puissance électrique  $P_N$  absorbée par le moteur et préciser la valeur de la puissance électromagnétique  $P_{Tm}$  transmise au rotor.

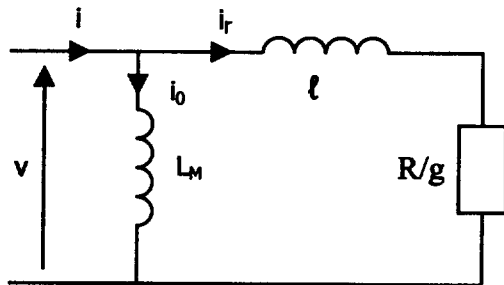
**A.1.4** - Calculer le couple électromagnétique  $C_N$ .

**A.1.5** - Exprimer les pertes par effet Joule au rotor  $p_r$  en fonction de  $P_{Tr}$ . Calculer  $p_{JrN}$ .

**A.1.6** - Calculer la puissance utile  $P_{UN}$  développée par le moteur.

## A.2 - Expression simplifiée du moment du couple électromagnétique

Pour chaque phase du moteur, on adopte le modèle équivalent monophasé simplifié de la figure 2.



**figure 2**

- $R/g$  est la résistance modélisant le transfert de puissance active au rotor
- $L_M$  est l'inductance magnétisante
- $l$  est l'inductance totale de fuites vue du stator
- $g$  est le glissement
- $v$  est une tension simple du réseau d'alimentation de valeur efficace  $V$
- $i$  est l'intensité du courant de ligne

On donne :  $L_M = 26,6 \text{ mH}$        $l = 2,38 \text{ mH}$        $R = 0,147 \Omega$

**A.2.1** - Calculer, sous alimentation nominale ( $V = 338 \text{ V}$  et  $f = 88 \text{ Hz}$ ), la valeur efficace  $I_0$  du courant  $i_0$ .

**A.2.2** - A partir du modèle équivalent monophasé de la figure 2, exprimer la valeur efficace  $I_r$  du courant  $i_r$  en fonction de  $V$ ,  $l\omega$ ,  $R$  et  $g$ .

**A.2.3** - Montrer que pour les faibles valeurs du glissement ( $g \ll 1$ ), la relation précédente

$$\text{devient : } I_r = \frac{V}{R} \cdot g$$

**A.2.4** - Exprimer la puissance transmise au rotor  $P_r$ , en fonction de  $I_r$  et de  $\frac{R}{g}$ .

**A.2.5** - En déduire alors que, pour les faibles valeurs du glissement, le moment du couple électromagnétique s'écrit :  $C = K \cdot g$

Exprimer  $K$  en fonction de la tension efficace  $V$ , de la résistance  $R$  et de la vitesse de synchronisme  $\Omega_s$  exprimée en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer la valeur numérique de  $K$  sous alimentation nominale ( $V = 338 \text{ V}$  et  $f = 88 \text{ Hz}$ ).

### A.3 - Fonctionnement en traction

On envisage le cas où le moteur développe un couple électromagnétique  $C = 170 \text{ N.m}$  en fonctionnant sous alimentation nominale ( $V = 338 \text{ V}$  et  $f = 88 \text{ Hz}$ ).

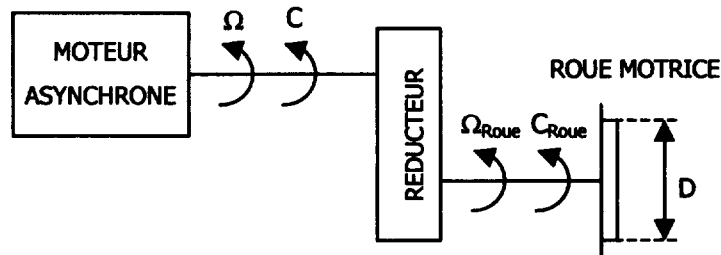
On supposera le glissement faible et on admettra les résultats suivants :

$$I_0 = 23 \text{ A} \qquad I_r = \frac{V}{R} g \qquad C = 8433 \text{ g}$$

- A.3.1** - Déterminer la valeur du glissement correspondant au fonctionnement étudié.
- A.3.2** - En déduire la valeur de la fréquence de rotation du rotor  $N$  en  $\text{tr.min}^{-1}$ .
- A.3.3** - Déterminer la valeur de  $I_r$ .
- A.3.4** - On note  $\varphi_r$  le déphasage de  $i_r$  par rapport à la tension simple  $v$  prise comme référence des phases. En se reportant au modèle équivalent monophasé de la figure 2, exprimer  $\tan \varphi_r$  en fonction de  $\ell \omega$  et de  $\frac{R}{g}$ . En déduire que  $\varphi_r \approx 10,2^\circ$ .
- A.3.5** - La tension simple  $v$  étant toujours choisie comme référence des phases, compléter le document réponse n°1 en y disposant les vecteurs de Fresnel  $\vec{I}_0$  et  $\vec{I}_r$  associés aux courants  $i_0$  et  $i_r$  (on adoptera l'échelle  $5 \text{ A / cm}$ ).
- A.3.6** - En déduire la construction du vecteur de Fresnel  $\vec{I}$  associé à  $i$ .
- A.3.7** - Déterminer alors graphiquement la valeur efficace  $I$  et le déphasage  $\varphi$  de  $i$  par rapport à  $v$ .
- A.3.8** - Calculer la puissance électrique  $P$  reçue par le moteur dans ce cas de fonctionnement.

## - Partie B - Performances mécaniques du tramway

La chaîne cinématique de motorisation d'une roue est donnée figure 3.



**Figure 3**

Toutes les pertes du moteur asynchrone étant négligées, les moments des couples électromagnétique et utile du moteur asynchrone sont égaux et notés C.

Le réducteur, de rendement égal à 1, et de rapport de réduction  $r = 10$ , impose  $\Omega_{roue} = \frac{\Omega}{10}$ .

Le diamètre d'une roue est :  $D = 0,52$  m.

### B.1 - Expression de la vitesse de rotation du rotor du moteur asynchrone en fonction de la vitesse de déplacement du tramway

On admet que la vitesse de déplacement du tramway dépend de la vitesse de rotation d'une roue selon la relation :

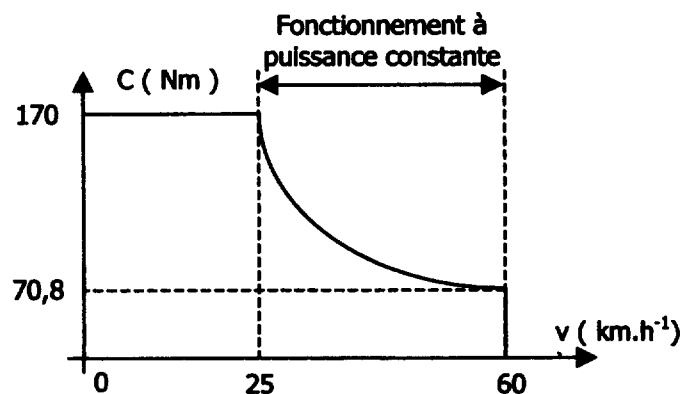
$$v = 3,6 \cdot \frac{D}{2} \cdot \Omega_{roue} \text{ avec } \Omega_{roue} \text{ en rad.s}^{-1} \text{ et } v \text{ en km.h}^{-1}$$

Montrer alors que la vitesse de rotation du moteur asynchrone vérifie la relation :

$$\Omega = 10,7 \cdot v \text{ avec } \Omega \text{ en rad.s}^{-1} \text{ et } v \text{ en km.h}^{-1}$$

### B.2 - Performances maximales de la rame de tramway

Il existe une courbe d'effort maximal que les limites de l'ensemble électromécanique ne permettent pas de dépasser. Pour un fonctionnement en marche avant, la figure 4 donne la caractéristique du couple électromagnétique maximal appliqué à un moteur de traction en fonction de la vitesse de la rame de tramway.



**Figure 4**

### B.2.1 - Fonctionnement en régime permanent sur le plat

Pour un fonctionnement sur le plat, le couple résistant  $C_R$  ramené sur l'arbre d'un moteur est dû :

- à la force de frottement roue - rail qui dépend de la masse  $M$  de la rame de tramway.
- à la force de pénétration dans l'air, proportionnelle à la vitesse  $v$  du tramway.

L'expression du couple résistant est ainsi :  $C_{R1} = 2,7 \cdot 10^{-4} \cdot M + 0,135 \cdot v$  avec  $M$  en kg,  $v$  en  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$  et  $C_{R1}$  en N.m

**B.2.1.1** - Tracer sur le document réponse n° 2, la caractéristique  $C_{R1}(v)$  pour  $M = 60$  tonnes (cas d'une rame pleine de passagers).

**B.2.1.2** - Déterminer graphiquement la valeur  $v_1$  de la vitesse maximale de la rame de tramway.

**B.2.1.3** - En déduire :

- la valeur  $C_1$  du couple électromagnétique d'un moteur de traction.
- la valeur  $\Omega_1$  de la vitesse de rotation d'un moteur de traction.
- la valeur  $P_1$  de la puissance que développe un moteur de traction.

### B.2.2 - Fonctionnement en régime permanent sur une montée de pente 8 %

Dans ce cas, il faut également tenir compte du couple exercé par le poids de la rame dans l'expression du couple résistant ramené sur l'arbre d'un moteur de traction. Ce dernier s'écrit alors :

$$C_{R2} = 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot M + 0,135 \cdot v \text{ avec } M \text{ en kg, } v \text{ en } \text{km} \cdot \text{h}^{-1} \text{ et } C_{R2} \text{ en N.m}$$

**B.2.2.1** - Tracer sur le document réponse n° 2, la caractéristique  $C_{R2}(v)$  pour  $M = 60$  tonnes.

**B.2.2.2** - Déterminer graphiquement la valeur  $v_2$  de la vitesse maximale de la rame de tramway.

**B.2.2.3** - En déduire la valeur  $P_2$  de la puissance que développe un moteur de traction.

### B.2.3 - Démarrage sur le plat

On cherche à déterminer la durée nécessaire à la rame de tramway pour atteindre en pleine charge ( $M=60$  tonnes) la vitesse de  $25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  lors d'un démarrage sur le plat.

Le moment d'inertie des masses en mouvement, ramené sur l'arbre d'un moteur, est :  $J = 4,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Pendant toute la phase du démarrage, chaque moteur de traction développe un couple électromagnétique constant  $C = 170 \text{ N.m}$ .

Pour les vitesses faibles, la force de pénétration dans l'air est négligeable devant la force de frottement roue-rail et le couple résistant ramené sur l'arbre d'un moteur se réduit à :  $C_R = 16,2 \text{ N.m}$ .

**B.2.3.1** - Quelle relation lie les grandeurs  $J$ ,  $\frac{d\Omega}{dt}$ ,  $C$  et  $C_R$  en régime dynamique ?

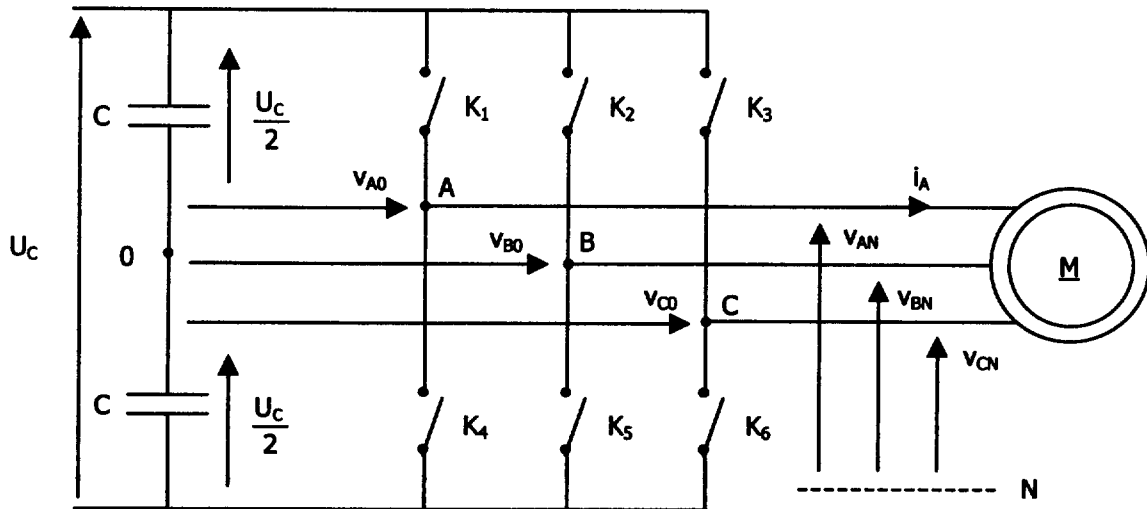
**B.2.3.2** - Montrer que durant le démarrage, la vitesse de rotation d'un moteur de traction vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d\Omega}{dt} \approx 35 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**B.2.3.3** - A l'aide de la relation établie en B.1, déduire la durée nécessaire au tramway pour atteindre la vitesse de  $25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

## - Partie C - Étude de l'onduleur

Chaque moteur de traction est alimenté par l'intermédiaire d'un onduleur de tension à partir du réseau 750 V continu.



**Figure 5**

La tension continue  $U_C$  est délivrée par la caténaire :  $U_C = 750 \text{ V}$ .

Deux condensateurs identiques forment un diviseur capacitif permettant de créer un point milieu O.

Chaque moteur de traction se comporte comme un récepteur équilibré.

Les interrupteurs  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  et  $K_6$ , réversibles en courant, sont commandables à l'ouverture et à la fermeture et sont supposés idéaux.

### C.1 - Onduleur à commande pleine onde

Les commandes des interrupteurs ( $K_1, K_4$ ), ( $K_2, K_5$ ), et ( $K_3, K_6$ ) sont deux à deux complémentaires. Chaque interrupteur est commandé à la fermeture durant une demi-période et à l'ouverture sur l'autre demi-période. La commande d'un bras d'onduleur est décalée d'un tiers de période sur celle du bras précédent (voir document réponse n°3).

**C.1.1** - Préciser la valeur de la tension  $v_{AO}$  lorsque  $K_1$  est fermé puis lorsque  $K_4$  est fermé. Compléter alors le document réponse n°3 en y traçant le chronogramme de la tension  $v_{AO}$ .

**C.1.2** - Tracer également sur le document réponse n°3 les chronogrammes des tensions  $v_{BO}$  et  $v_{CO}$ .

**C.1.3** - En admettant la relation  $v_{AN} = \frac{1}{3} [2v_{AO} - v_{BO} - v_{CO}]$ , construire, sur le document réponse n°3, le chronogramme de  $v_{AN}$  en indiquant les différentes valeurs prises.

**C.1.4** - Calculer la valeur efficace  $V_{AN}$  de la tension  $v_{AN}$  en fonction de  $U_C$ .



**C.1.5** - La décomposition en série de Fourier de la tension  $v_{AN}$  est la suivante :

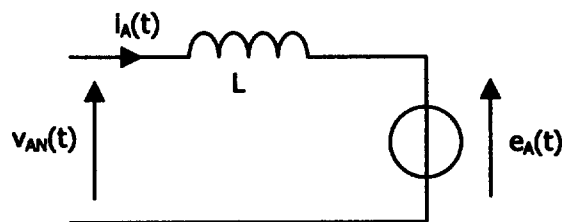
$$v_{AN}(t) = \frac{2U_c}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \frac{1}{11} \sin(11\omega t) + \dots \right]$$

Donner l'expression du fondamental  $v_1(t)$  de la tension  $v_{AN}(t)$ . Calculer sa valeur efficace  $V_1$  et tracer l'allure de  $v_1(t)$  sur le document réponse n°3.

## C.2 - Association onduleur - moteur de traction

Dans cette partie, on étudie l'influence de la forme des tensions délivrées par l'onduleur sur le couple électromagnétique instantané d'un moteur de traction.

On admet que la phase A du moteur de traction peut être décrite par le schéma simplifié de la figure 6 dans lequel la force électromotrice  $e_A(t)$  traduit la conversion électromécanique.



**Figure 6**

On donne :  $L = 2,31 \text{ mH}$  et  $e_A(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t - \psi)$

La tension  $v_{AN}(t)$  délivrée par l'onduleur de tension étudié en C.1. comporte de nombreux harmoniques. Pour simplifier l'étude, on limite le développement en série de Fourier de la tension simple  $v_{AN}(t)$  et du courant de ligne associé à leurs fondamentaux et à leurs harmoniques de rang 5 et 7 :

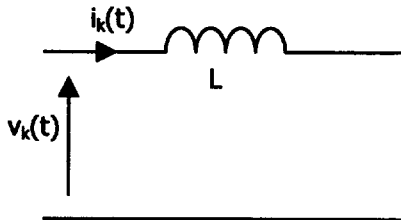
$$v_{AN}(t) = V_1\sqrt{2} \sin(\omega t) + V_5\sqrt{2} \sin(5\omega t) + V_7\sqrt{2} \sin(7\omega t) \quad \text{avec } V_5 = \frac{V_1}{5} \quad \text{et } V_7 = \frac{V_1}{7}.$$

$$i_A(t) = I_1\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_5\sqrt{2} \sin(5\omega t - \varphi_5) + I_7\sqrt{2} \sin(7\omega t - \varphi_7)$$

**Dans la suite de la partie C, on se place au point de fonctionnement nominal pour lequel on adoptera les valeurs numériques suivantes :**

$$V_1 = 338 \text{ V} ; I_1 = 35,4 \text{ A} ; \varphi_1 = 43^\circ ; E = 309 \text{ V} ; \psi = 6,2^\circ ; f = 88 \text{ Hz et } \omega = 553 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Pour les harmoniques de rangs 5 et 7, le modèle équivalent de la figure 6 se réduit à :



$$v_k(t) = V_k \sqrt{2} \sin(k\omega t)$$

$$i_k(t) = I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \varphi_k)$$

avec  $k = 5$  ou  $7$ .

**Figure 7**

- C.2.1** - Calculer les impédances  $Z_5$  et  $Z_7$  présentées par l'inductance  $L$  respectivement aux fréquences  $f_5 = 5f$  et  $f_7 = 7f$ .
- C.2.2** - En déduire les valeurs efficaces  $I_5$  et  $I_7$  des harmoniques de rang 5 et 7 du courant  $i_A(t)$ .

**Dans la suite, on prendra :  $I_5 = 10,6$  A et  $I_7 = 5,4$  A.**

La puissance électromagnétique instantanée mise en jeu dans la phase A est :  $p_{emA}(t) = e_A(t) \cdot i_A(t)$ .

En tenant compte des deux autres phases, on montre que, pour de faibles valeurs de l'angle  $\psi$ , la puissance électromagnétique instantanée totale transmise au rotor s'écrit :

$$p_{em}(t) = 3EI_1 \cos(\varphi_1 - \psi) - 3E(I_5 - I_7) \sin(6\omega t)$$

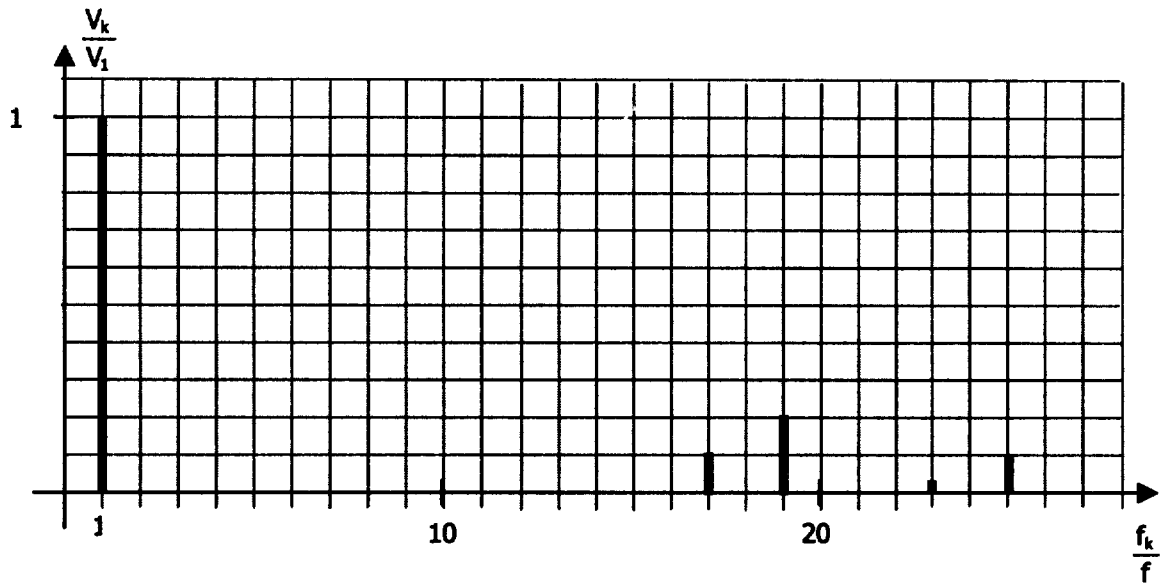
On rappelle que le couple électromagnétique instantané  $c(t)$  vérifie la relation :  $p_{em}(t) = c(t) \cdot \Omega_s$ .

**C.2.3** - Montrer que le couple électromagnétique instantané est la somme :

- d'un terme constant  $C$  que l'on calculera et dont on précisera le sens physique,
- d'un terme  $c'(t)$  variable dans le temps, appelé couple pulsatoire, dont on précisera la fréquence et l'amplitude  $C'_{MAX}$ .

**C.2.4** - Calculer le rapport  $\frac{C'_{MAX}}{C}$ . Conclure.

En pratique, la structure et la commande retenues pour l'onduleur sont différentes de celle envisagées jusqu'à présent. Pour un fonctionnement à grande vitesse, on adopte une commande de type MLI précalculée. Le spectre en amplitude de la tension simple  $v_{AN}(t)$  est alors donné figure 8.



**Figure 8**

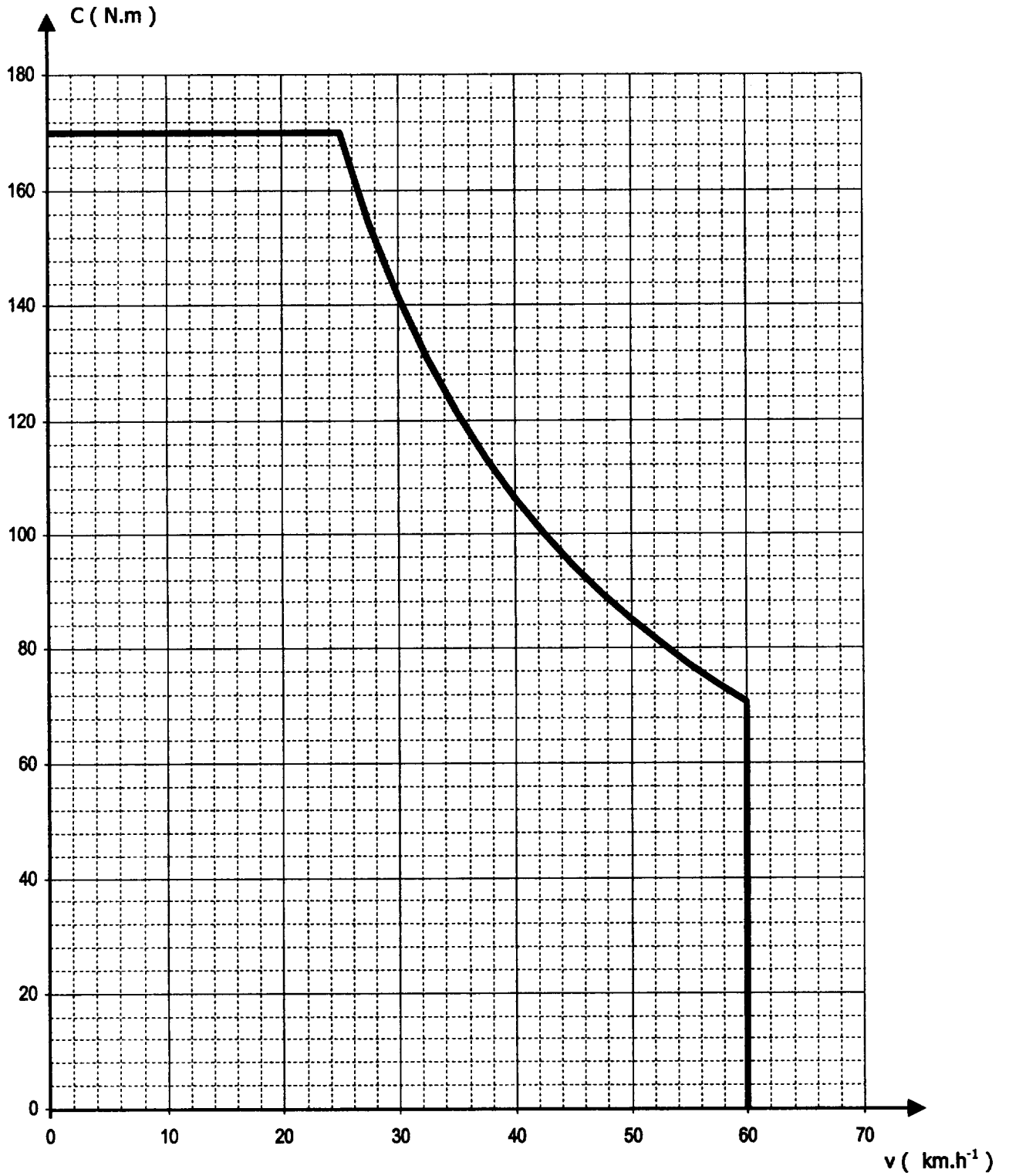
**C.2.5** - Préciser le rang de l'harmonique de  $v_{AN}(t)$  le plus proche du fondamental. Quel intérêt présente cette commande vis-à-vis du couple pulsatoire ?

**Document réponse n°1**

Échelle : 1 cm pour 5 A



**Document réponse n°2**



**Document réponse n°3**

