Session 2006

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

« COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée: 2 heures

Coefficient: 2

<u>Matériel et documents autorisés</u> :

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé
Une feuille de papier millimétrée est fournie.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dés que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2

CGMAT

EXERCICE 1 (11 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine

Un institut de recherche démographique a étudié l'évolution de la population d'une grande ville.

Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant où t_i désigne le rang de l'année et où p_i désigne l'effectif de la population, en millions d'habitants au cours de la même année.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
Effectif : p_i	5	5,6	6,1	6,8	7,6	8,4

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $y_i = \ln p_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

Rang de l'année : t_i	0	5	10	15	20	25
$y_i = \ln p_i$						

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (t_i, y_i). Arrondir à 10^{-3}.
3. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en t sous la forme $y = at + b$, où a et b sont à arrondir à 10^{-3}.
4. En déduire une expression de p en fonction de t de la forme $p = \alpha e^{kt}$ où la constante α sera arrondie à 10^{-1} et la constante k sera arrondie à 10^{-2}.
5. A l'aide du résultat du 4., donner une estimation de l'effectif de la population l'année de rang 35.

   Arrondir à 10^{-1}.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout t de $[-25, 35]$ par $f(t) = 5e^{0,02t}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unités 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1. Étudier les variations de f sur $[-25, 35]$.
2. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

3. a) Démontrer que la valeur moyenne de f sur [0, 25] est $V_m = 10\left(e^{0,5} - 1\right)$.

   b) Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-1}, de V_m.

4. On admet que, lorsque $0 \leq t \leq 30$, l'effectif de la population de la ville étudiée dans la partie A est donné, en millions d'habitants, l'année de rang t, par : $f(t) = 5e^{0,02t}$.

   a) Déterminer l'effectif, en millions d'habitants, de la population l'année de rang 28. Arrondir à 10^{-1}.

   b) Interpréter, à l'aide d'une phrase, le résultat obtenu au 3. b).

   c) Déterminer le rang de l'année au cours de laquelle l'effectif de la population dépassera 9 millions d'habitants.

EXERCICE 2 (9 points)

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande quantité un certain type de pièces pour de l'équipement informatique.

A. Probabilités conditionnelles

Les pièces sont fabriquées par deux machines notées : « machine 1 » et « machine 2 ».

40% des pièces proviennent de la machine 1 et 60% de la machine 2.

On admet que 5% des pièces provenant de la machine 1 sont défectueuses et que 2% des pièces provenant de la machine 2 sont défectueuses.

On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée des deux machines.

Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.

On appelle A l'événement : « la pièce provient de la machine 1 ».

On appelle B l'événement : « la pièce provient de la machine 2 ».

On appelle D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

1. A l'aide des informations contenues dans l'énoncé, donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(D)$, et $P_B(D)$.

   (On rappelle que $P_A(D) = P(D / A)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé).
2. a)Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.

   b)En déduire la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de la machine 1 sachant qu'elle est défectueuse.

B. Loi binomiale

Dans un stock de ces pièces, on prélève au hasard 10 pièces pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.

On note E l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans ce stock est défectueuse ». On suppose que $P(E) = 0{,}03$.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune pièce ne soit défectueuse.

   Arrondir à 10^{-3}.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux pièces soient défectueuses. Arrondir à 10^{-3}.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Dans un lot de ce type de pièces, on admet que 3,2% des pièces sont défectueuses.

On prélève au hasard 500 pièces de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 500 pièces.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 500 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 500 pièces.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}032$.

1. On considère que la loi suivie par la variable aléatoire Y peut être approchée par la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 3,9. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart type 3,9.

   Déterminer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait entre 13 et 19 pièces défectueuses, c'est-à-dire calculer $P(12{,}5 \leq Z \leq 19{,}5)$. Arrondir à 10^{-2}.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = ku'$	$\left(e^u\right)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

3. *PROBABILITES :*

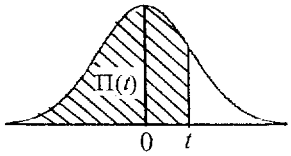
a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(*t*)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$