BTS INFORMATIQUE DE GESTION

E2 : MATHEMATIQUES I

SESSION 2006

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

EPREUVE OBLIGATOIRE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet.

Matériel autorisé :
Calculatrice conformément à la circulaire n°99-186 du 16/11/1999

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1/4 à 4/4.

E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

—— Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices. ——

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

—— Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet. ——

⇨ ***RESPECT DES CONSIGNES (arrondis, échelles, ...) : 1 point***

EXERCICE N° 1 (7 points)

Les parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Toutes les probabilité demandées seront arrondies au millième.

La coopérative « Le Val de Seille » produit et commercialise des légumes. Un service étudie le problème de la mise en bocal de tomates confites : le poids annoncé est de 500 g, et on décide qu'un bocal est « mal rempli » s'il pèse moins de 485 g.
On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque bocal, associe son poids en grammes, suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 12.

Partie A

1. Calculer la probabilité qu'un bocal soit mal rempli.
2. Calculer la probabilité $P(491 \leq X \leq 518)$.
3. Déterminer le réel h tel que $P(500 - h \leq X \leq 500 + h) = 0{,}95$.
   Traduire ce résultat en français courant.

Partie B

Grâce à une politique de qualité, on a ramené le pourcentage de bocaux mal remplis à 2 %.
Un contrôleur teste un lot de 200 bocaux prélevés sur la production (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise).

1) On désigne par Z la variable aléatoire désignant le nombre de bocaux mal remplis dans ce lot.
   a) Quelle est la loi suivie par Z ? Justifier votre réponse.
   b) Donner l'espérance et l'écart-type de Z.
   c) Calculer $P(Z = 2)$.

2) On admet que Z peut être approchée par une variable Z' suivant une loi de Poisson.
   a) Donner la valeur du paramètre λ de cette loi de Poisson.
   b) Déterminer la probabilité $P(Z' \geq 3)$.

Partie C

Les bocaux sont remplis sur deux chaînes de travail Alpha et Bêta.
La chaîne Alpha fournit 80 % des bocaux et la chaîne Bêta en fournit 20 %.
Parmi les bocaux fournis par la chaîne Alpha, il y en 1 % de mal remplis.
La probabilité qu'un bocal fourni par la chaîne Bêta soit mal rempli est égale à un certain réel β.
Un bocal est choisi au hasard dans la production.
On note : - A l'événement : « le bocal a été rempli sur la chaîne Alpha »,
- B l'événement : « le bocal a été rempli sur la chaîne Bêta »,
- M l'événement : « le bocal a été mal rempli ».

1) Construire un arbre pondéré ou un tableau à double entrée illustrant la situation.
2) On a choisi un bocal mal rempli. Déterminer la probabilité qu'il ait été rempli sur la chaîne Alpha, sachant que $P(M) = 0{,}02$.
3) a) Calculer en fonction de β la probabilité $P(M)$.
   b) En déduire la valeur de β.

EXERCICE N° 2 (6 points)

Partie A

Etude théorique

On se propose de déterminer les puissances successives de la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer M^2, M^3 et M^4. Etablir une relation simple entre M^4 et M^3.

2) On admet qu'il existe une suite numérique (a_n) telle que, pour tout $n \geq 3$, $M^n = a_n M^3$.
   Préciser la valeur de a_3 et a_4, et en calculant $M^{n+1} = M^n \times M$, montrer que la suite (a_n) est géométrique, donner sa raison.

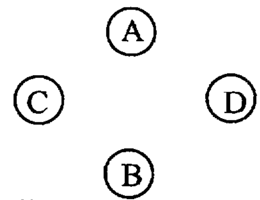
3) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

4) En déduire que $M^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Partie B

Application

Monsieur ROBERT, agent commercial de la coopérative « Le Val de Seille » pour le Centre-Est, prospecte les quatre villes Auxerre, Beaune, Châtillon et Dijon, notées A, B, C, D. Ses déplacements sont repérés par la matrice d'adjacence M définie dans la partie A.



1) Va-t-il directement d'Auxerre à Beaune ?

2) Recopier et compléter le graphe ci-contre correspondant à M.

3) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 allant de A à D. En faire la liste.

4) A l'aide de la partie A, déterminer le nombre de chemins de longueur 8 de ce graphe.
   Justifier votre réponse.

EXERCICE N° 3 (6 points)

Partie A

Etude d'une fonction

On donne la fonction f définie sur l'intervalle $[0;100]$ par $f(x) = 216x - x^2 - 4000 \ln\left(\dfrac{x+12}{12}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

(unités graphiques : 1 cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 200 en ordonnée).

1) Calculer $f'(x)$ et montrer et que, sur l'intervalle $[0;100]$, son signe est celui du polynôme P défini par $P(x) = -2x^2 + 192x - 1408$.
2) Etudier le signe de $P(x)$, et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;100]$. (on arrondira les valeurs numériques à l'unité).
3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ pour $x \in [0;100]$.
4) A l'aide du graphique, donner une valeur approchée à l'entier près de la solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$, puis à l'aide du tableur de votre calculatrice, préciser cette valeur arrondie au millième.

Partie B

Application

Pour des raisons d'approvisionnement limité, la coopérative « Le Val de Seille » ne peut produire et commercialiser plus de 100 tonnes de tomates confites par an..

Le coût total de production (en euros) est donné par la fonction g définie sur l'intervalle $[0;100]$par

$$g(x) = 10x^2 + 40\,000 \ln\left(\frac{x+12}{12}\right)$$, où x désigne le nombre de tonnes produites.

Elle vend toute cette production à 2160 € la tonne.

1) Déterminer, en fonction de x, le bénéfice de la société sur le poste « tomates confites ». Exprimer ce bénéfice en utilisant la fonction f de la partie A.
2) Combien de kilogrammes faut-il produire au minimum pour que ce bénéfice soit positif ?
3) Combien de tonnes faut-il produire pour que ce bénéfice soit maximum ? Que vaut-il alors ?

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$)	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}\,t=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}\,t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x'+b(t)\,x=0$	$f(t)=k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t\mapsto\dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES* :

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np$ $\qquad$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

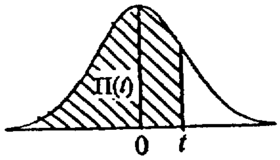
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $\qquad$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\qquad$ $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$