CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

MATHEMATIQUES BTS OL 2006 – Corrigé
(proposé par Olivier Bonneton)
Important : Ce corrigé n'a pas de valeur officielle et n'est donné qu'à titre informatif sous la responsabilité de son auteur par Acuité

Exercice 1 :

Partie A : Loi Binomiale et Loi de Poisson

1) La variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres n=50 et p=0.02 car il s'agit d'une répétition de 50 expériences indépendantes (tirages avec remise) et c'est une expérience à deux issues (succès / échec) avec comme probabilité de succès les 2 % de palets non conformes.

2) On demande P (X=1) = C (50,1) x 0.02 x 0.98^{49} = 0.37

3) On demande au plus un palet c'est-à-dire P (X≤1) :

P (X≤1) = P (X=0) + P (X=1) = C (50,0) x 0.98^{50} + 0.37 = 0.73

4) On peut approcher une loi Binomiale par une loi de Poisson de paramètre λ = np = 50 x 0.02 = 1

5) Ce n'est pas un calcul mais plutôt une lecture de table qui est ici demandé :

P (Y=1) = 0.37 et P (Y≤1) = 0.368 + 0.368 = 0.74

Partie B : Evénements indépendants

1) La lentille présente les deux défauts : P (A∩B) = P (A) x P (B) car A et B sont indépendants. La valeur est donc 0.03 x 0.02 = 0.0006 (on demande la valeur exacte)

2) La lentille présente au moins un des deux défauts : il s'agit ici du OU inclusif. Par conséquent, on cherche P (A∪B) = P (A) + P (B) - P (A∩B) = 0.03 + 0.02 - 0.0006 = 0.0494

3) La lentille prélevée ne présente aucun défaut : On peut déterminer cette probabilité de la manière suivante : P (E_4) = 1 - P (A∪B) = 0.9506

4) La lentille présente **un seul** défaut : On peut trouver cette probabilité en utilisant le OU exclusif, c'est-à-dire en calculant P (A∪B) - P (A∩B) = 0.0494 - 0.0006 = 0.0488
On aurait pu calculer cette probabilité en faisant le calcul suivant :

$$P(\overline{A}\cap B)+P(A\cap\overline{B})$$

Partie C : Test d'Hypothèse

1) Sous l'hypothèse H0, Si Z suit la loi Normale N(m,σ) alors $\overline{Z}$ suit la loi Normale de moyenne m=9.80 et d'écart type

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.13}{\sqrt{100}}=0.013$$

2) Sous l'hypothèse Nulle H0, on peut déterminer h en procédant au calcul suivant :

$$P(9.80-h\leq\overline{Z}\leq 9.80+h)=0.95$$

On transforme dans la loi Normale centrée réduite :

$$P(\frac{9.80-h-9.80}{0.013}\leq T\leq\frac{9.80+h-9.80}{0.013})=0.95$$

$$P(\frac{-h}{0.013} \leq T \leq \frac{h}{0.013}) = 0.95$$

L'intervalle est symétrique. On applique donc la relation :

$$2\prod(\frac{h}{0.013}) - 1 = 0.95$$

$$\prod(\frac{h}{0.013}) = 0.975 = \prod(1.96)$$

Par lecture inversée de la table de la loi Normale Centrée Réduite

En égalisant, on arrive à h = 0.03 (valeur exacte 0.02548)

3) La règle de décision de ce test d'hypothèse est donc la suivante : L'intervalle d'acceptation se trouve entre 9.80 - 0.03 = 9.77 et 9.80 + 0.03 = 9.83. Si la moyenne des diamètres de cet échantillon se situe entre ces bornes, dans ce cas on conserve H0 et on conclut que les palets de la livraison sont conformes au seuil de confiance de 95 %. Dans le cas contraire, on exclut H0 et on accepte H1 (les palets ont une moyenne des diamètres dans cet échantillon qui, au seuil de confiance de 95 %, diffèrent significativement du diamètre de 9.80 millimètres).

4) En ce qui nous concerne, la moyenne observée est de 9.79. Elle se situe dans l'intervalle de tolérance. D'après la règle de décision précédente, on peut en conclure au risque de 5 % que les palets de la livraison sont conformes.

Exercice 2 :

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1) y' - y = 0. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre. On applique la méthode (cf. formulaire).

a=1

b=-1 b/a = -1 Primitive de b/a = -x

La solution est donc y (x) = C e^x où C est une constante réelle.

2) Pour vérifier que h (x) est une solution particulière, calculons h'(x) :

h'(x) = 1.e^x + x.e^x

Ainsi, lorsqu'on calcule h'(x) - h (x) = e^x + x.e^x - x.e^x = e^x L'équation E est vérifiée.

3) Pour déterminer les solutions de E, on regroupe la solution sans second membre et la solution particulière : y(x) = Ce^x +x.e^x = (C+x)e^x

Partie B : Etude d'une fonction

1) a) La limite quand x tend vers +∞ est évidente : Le polynôme tend vers +∞ ainsi que la fonction exponentielle. Le produit de ces deux fonctions va donc tendre naturellement vers +∞ .

b) La limite en -∞ est grandement simplifiée par l'énoncé. Il suffit de développer la fonction.
f(x) = x.e^x + e^x

Le premier morceau tend vers 0 d'après l'énoncé.
La fonction exponentielle tend elle aussi vers 0 en -∞.

On a donc la limite de f(x) en $-\infty$ qui vaut 0

c) Le résultat précédent nous permet de donner une interprétation graphique de f en $-\infty$. La fonction admet une asymptote horizontale d'équation y=0 en $-\infty$.

2) a) On utilise la relation (uv)' = u'v + uv'. $f'(x) = 1.e^{x} + (x+1)\,e^{x} = (x+2)\,e^{x}$

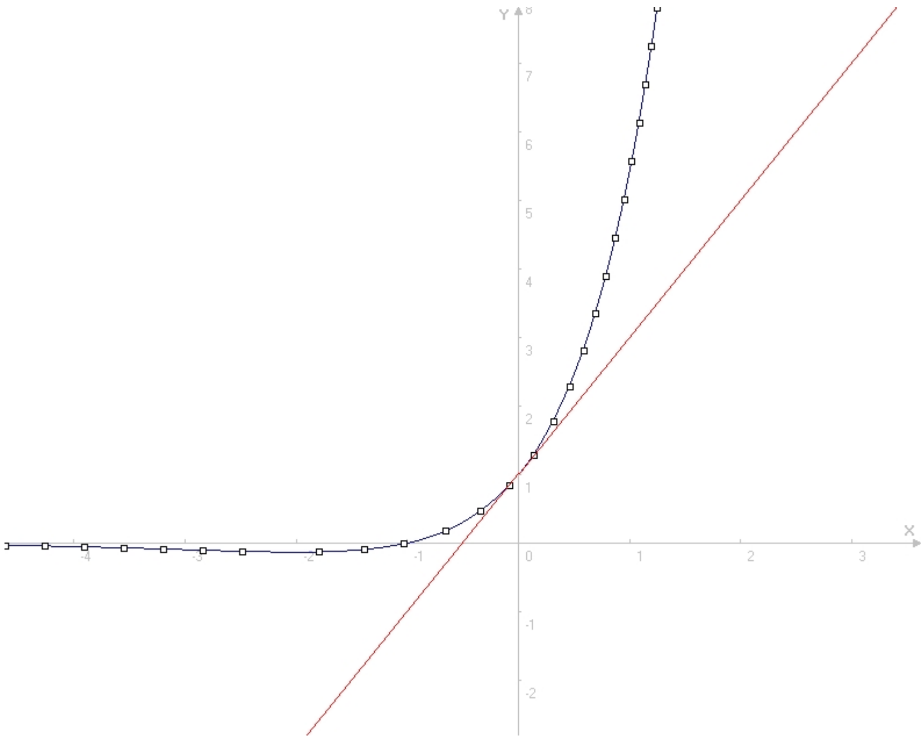
b) On peut facilement réaliser le tableau de variation en étudiant le signe de la dérivée f'(x).

e^{x} est toujours positive. x+2 est positive ou nulle sur $[-2 ; +\infty[$

X	**$-\infty$**		**-2**		$+\infty$
f' (x)		-	0	+	
f (x)		↘	$-1/e^2$	↗	

3) a) L'équation de la tangente T à la courbe C en x=0 s'écrit : $y = f'(0)\,x + f(0) = 2\,x + 1$

b)



<u>Partie C : Calcul Intégral</u>

1) La fonction f définie dans la partie B est bien de la forme des solutions de l'équation différentielle E déterminées dans la partie A avec C=1. f(x) vérifie donc bien $f'(x) - f(x) = e^{x}$

2) En utilisant la relation précédente : $f(x) = f'(x) - e^{x}$. On intègre et on trouve : $F(x) = f(x) - e^{x}$. En remplacant f(x) par $(x+1)\,e^{x}$, on trouve $F(x) = x.e^{x}$

3) a) On calcule maintenant

$$\int_{a}^{-2} f(x)dx = [F(x)]_{a}^{-2} = F(-2) - F(a)$$

$= -2\,e^{-2} - a\,e^{a}$

b) On nous demande maintenant l'aire sous la courbe en cm² entre x=-4 et x=-2. Deux erreurs à ne pas faire : l'intégrale calculée est négative sur la portion de plan considérée. Il faut donc prendre l'opposé pour le calcul de l'aire. La deuxième erreur consiste à oublier de multiplier par 4 pour passer des unités d'aires aux cm² (échelle de 2 cm)

On arrive ainsi à la valeur exacte suivante : $I = 4\,(2\,e^{-2} - 4\,e^{-4})$

c) On nous demande une valeur approchée à 0.01 près de la valeur exacte précédente. On trouve 0.79 cm²