BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
_« M.A.V.E.L.E.C et M.R.I.M »_
SESSION 2006

E1.B1 MATHEMATIQUES – U12

Durée : 2 heures **_Coefficient : 2,5_**

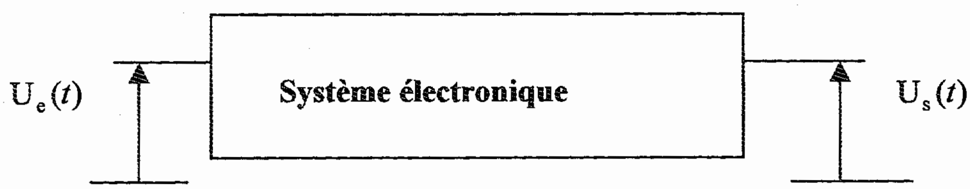
SOMMAIRE

Ce sujet comporte : - 3 pages d'énoncé
- 2 annexes (l'annexe 2 est à rendre avec la copie)

0609-MAV ST B
0609-MIR ST 12

<u>EXERCICE 1</u> (4,5 points)

L'objectif de cet exercice est de montrer comment un signal d'entrée "en dents de scie" est transformé par un montage dérivateur en un signal "en créneaux ".
Un système électronique, comportant une résistance R et un condensateur de capacité C, a une tension d'entrée $U_e(t)$ et une tension de sortie $U_s(t)$ à chaque instant t.



La tension d'entrée est un signal périodique, de période T = 2s, qui est représenté graphiquement sur une période en **annexe 1.**

1. Déterminer une équation :
   a. de la droite (OA)
   b. de la droite (AB).

2. On admet que le signal d'entrée U_e est défini par :

   $U_e(t) = 3\,t \qquad$ si $0 \leq t < 1$

   $U_e(t) = -3t + 6$ si $1 \leq t < 2$.

   On note U'_e la dérivée de la fonction U_e.
   a. Calculer $U'_e(t)$ pour tout t de l'intervalle]0 ; 1[.
   b. Calculer $U'_e(t)$ pour tout t de l'intervalle]1 ; 2[.

3. On admet qu'à chaque instant le signal de sortie est lié au signal d'entrée par la relation :

$$U_s(t) = -RC\,U'_e(t).$$

   On donne R = 10 kΩ et C = 150 μF.
   a. Calculer $U_s(t)$ pour tout t de l'intervalle]0 ; 1[.
   b. Calculer $U_s(t)$ pour tout t de l'intervalle]1 ; 2[.

<u>EXERCICE 2</u> (7,5 points)

L'objectif de cet exercice est de déterminer le «fondamental» d'un signal «en créneaux» et d'étudier son importance relative dans l'énergie transportée par le signal.

La représentation graphique d'un signal périodique s, de période T = 2s, est donnée pour tout t de l'intervalle $[-2\ ;\ 2[$ en **annexe 1** : elle comprend quatre segments de droite horizontaux, sans leurs extrémités, et les quatre points, situés sur l'axe des abscisses, ayant pour abscisses $-2\ ;\ -1\ ;\ 0$ et 1.

1.
   a. Donner la valeur de $s\,(t)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

   b. Donner la valeur de $s\,(t)$ sur l'intervalle $]1\ ;\ 2[$.

   c. Donner la valeur de $s\,(0)$ et de $s\,(1)$.

2. Déterminer graphiquement la parité du signal s. Justifier la réponse.

3. Calculer la valeur exacte de la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$ du signal s.

4. Le polynôme de Fourier d'ordre 1 associé au signal périodique s est :
$$\mathrm{P}_1(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t).$$
   a. Donner, sans calcul, la valeur des coefficients a_0 et a_1. Justifier la réponse.

   b. On admet que $b_1 = \dfrac{4}{\mathrm{T}} \displaystyle\int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} s(t) \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$, où T et ω sont la période et la pulsation du signal s, et où $s(t)$ est la valeur prise par le signal sur l'intervalle $]0\ ;\ \dfrac{\mathrm{T}}{2}[$.
   Calculer le coefficient b_1.

   c. En déduire que $\mathrm{P}_1(t) = -\dfrac{18}{\pi} \sin(\pi t)$.

5. L'énergie moyenne, en joule, transportée sur une période par le signal s est :
$$\mathrm{E} = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} s^2(t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$
   où $s^2(t)$ est le carré de la valeur prise par $s(t)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ \dfrac{\mathrm{T}}{2}[$.

   Vérifier que E = 20,25 J .

6. D'après la relation de Parseval, l'énergie transportée par les n premiers harmoniques est :

$$E_n = a_0 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + ... + a_n^2 + b_n^2).$$

Donner la valeur exacte E_1 de l'énergie moyenne transportée par le signal P_1 sur une période.

7. On considère que l'approximation du signal s par P_1 est satisfaisante lorsque l'énergie moyenne transportée par P_1 sur une période représente au minimum 90% de celle transportée par s.

   a. Calculer $\frac{E_1}{E}$. Quelle est en pourcentage, l'énergie relative transportée par le premier harmonique ?

   b. Cette approximation est-elle satisfaisante ?

   c. Que peut-on faire pour rendre l'approximation du signal s satisfaisante ?

<u>EXERCICE 3</u> (8 points)

Lors de la transmission d'un signal le long d'une fibre optique, ce signal subit une perte de puissance, c'est à dire une atténuation, qui dépend de la nature et de la longueur de la fibre optique.

On utilise ici une fibre dont l'atténuation par kilomètre est 0,4 dB/km.
La longueur L (en km) de la fibre permettant de recevoir un signal de puissance $P_s = 5\ \mu W$ est alors liée à la puissance du signal émis P_e (en W) par la relation :

$$L = 10{,}86 \ln P_e + 132{,}5 \text{ où ln est le logarithme népérien.}$$

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0,01 ; 1] par $f(x) = 10{,}86 \ln(x) + 132{,}5$.

a. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f.

b. Donner le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0,01 ; 1] .

c. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle [0,01 ; 1] .

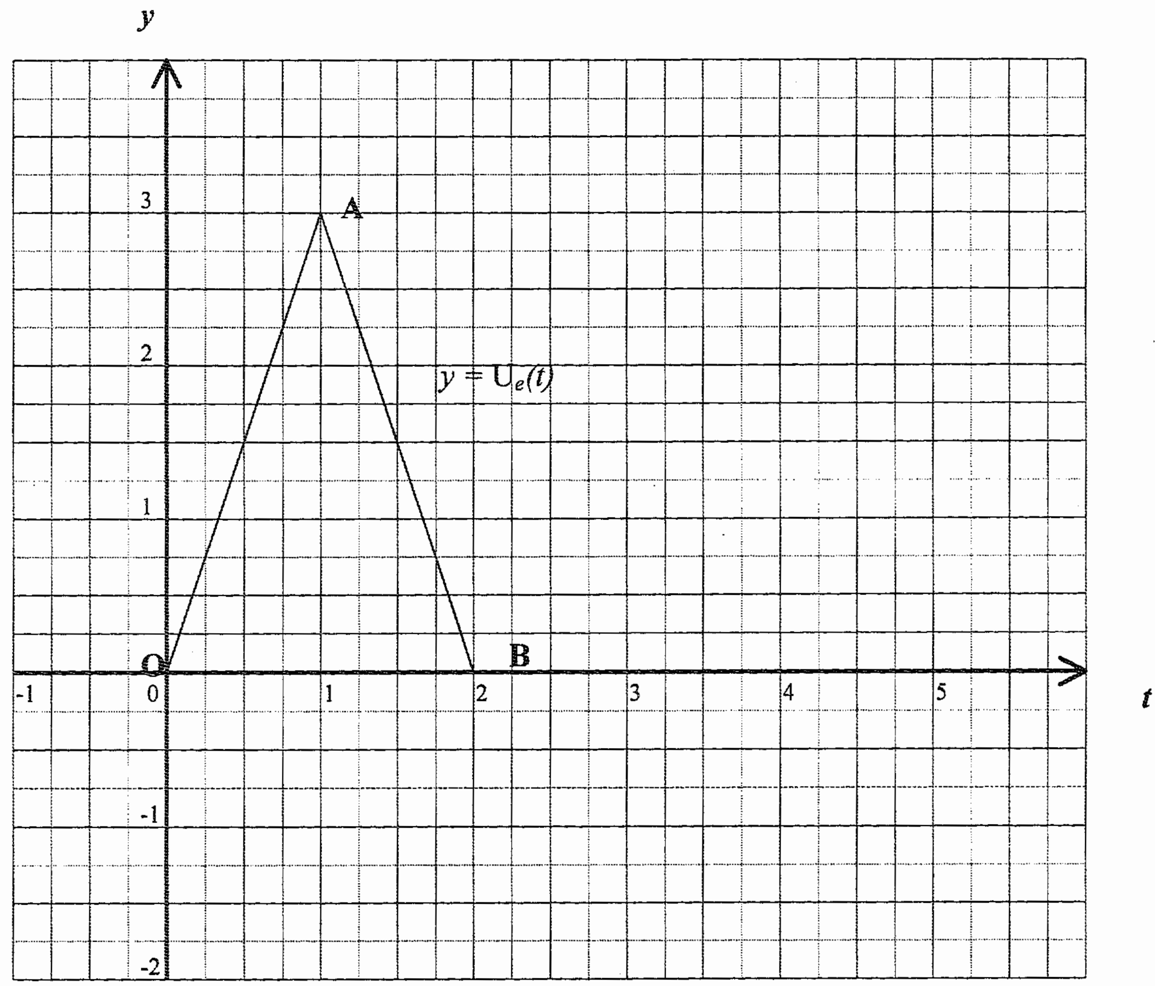
d. Compléter le tableau de valeurs figurant à **l'annexe 2.** Arrondir les résultats à l'unité.

e. Tracer la courbe représentative de f sur **l'annexe 2.**

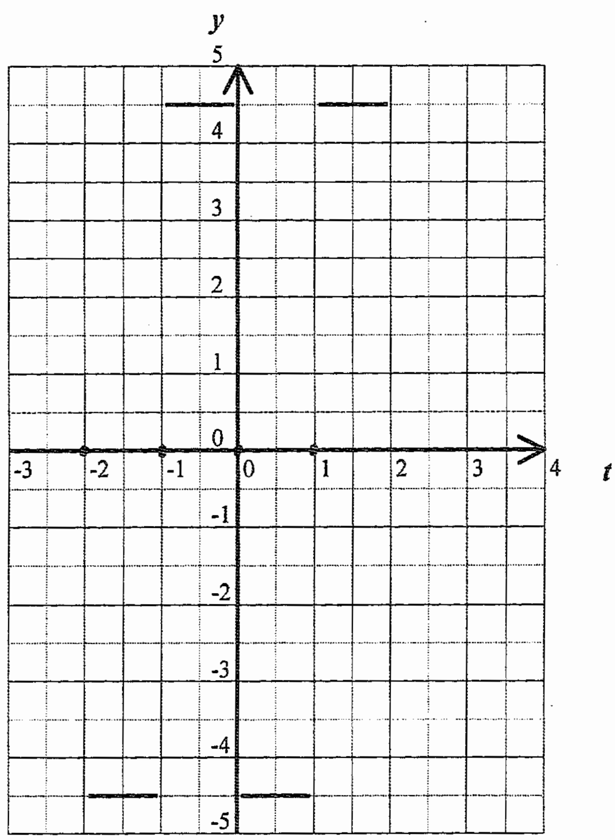
2. Déterminer graphiquement la puissance du signal émis P_e permettant d'obtenir un signal de puissance $P_s = 5\ \mu W$ à la sortie de la fibre optique dans le cas où celle-ci a pour longueur L = 120 km.
Laisser apparents les traits permettant la lecture graphique.

ANNEXE 1

EXERCICE 1



EXERCICE 2



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

EXERCICE 3

1.d.

x	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1
$f(x)$	82	100			119			133

1.e.