BREVET DE TECHNICIEN

ÉTUDES ET ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Durée : 1 h 30 **Coefficient : 3**

- SUJET -

Dès la remise du sujet, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 2 exercices et 1 problème.

L'annexe est à rendre avec la copie.

Il sera tenu compte de la présentation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE 1 (6 points)

Pour chaque question, 3 réponses sont proposées ; une seule est exacte. On demande de noter cette réponse sur la copie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

1°/ La représentation graphique de la fonction exponentielle admet :

a. une asymptote horizontale
b. une asymptote verticale
c. une tangente horizontale.

2°/ Une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{1}{x}$
b. $F(x) = x\ln x - x + 7$
c. $F(x) = e^x$

3°/ On note $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$. I est égale à :

a. $\ln 2$
b. 1
c. $\frac{1}{2}$

4°/ Pour tout réel x, $\left(e^x\right)^2 \times e^{x+1}$ est égal à :

a. e^{x^2+x+1}
b. $e^{2x(x+1)}$
c. e^{3x+1}

5°/ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+1)\,e^x$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à :

a. $2x\,e^x$
b. $(x^2+2x+1)\,e^x$
c. $(x^2+1)\,e^x$

6°/ Dans $\mathbb{R}$, l'équation $(e^x-2)(e^x+2)=0$ admet :

a. aucune solution
b. deux solutions
c. une solution

EXERCICE 2 (4 points)

1°/ a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

b) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation : $\ln x + \ln(2x+3) = \ln 2$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

2°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^{-x} - 1 < 0$.

PROBLÈME (10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2\, e^{-x}$.
On note C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unités graphiques 2 cm en abscisse, 6 cm en ordonnée.
La courbe C est donnée sur l'annexe à rendre avec la copie.

1°/ **Limites**

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2°/ **Calcul de la fonction dérivée f'**

Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = 5x(2-x)\, e^{-x}$.

3°/ **Étude des variations de f**

a) Pourquoi peut-on dire que le signe de $f'(x)$ est celui de $x(2-x)$?

b) Donner le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de l'expression $x(2-x)$.

c) Utiliser la question précédente pour dresser le tableau des variations de f.

4°/ **Équation d'une tangente**

Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 3.

5°/ **Calcul d'aire**

a) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -5\,(x^2 + 2x + 2)\, e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)\,dx$.

c) Sur l'annexe à rendre avec la copie, colorier la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$. Donner la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire de cette partie colorée.

d) Donner une valeur approchée, en cm², de l'aire de cette partie colorée.

ANNEXE (À RENDRE AVEC LA COPIE)