BREVET DE TECHNICIEN

TOPOGRAPHE

session 2006

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 h **Coefficient : 5**

– SUJET –

Dès la remise du sujet, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 2 **exercices et 1 problème indépendants.**

Il sera tenu compte de la présentation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : **(4,5 points)**

1°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - x - 6 = 0$.

2°/ En déduire :

a) La résolution de l'équation : $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

b) La résolution de l'équation : $\ln x - 1 - \frac{6}{\ln x} = 0$

c) La résolution sur l'intervalle $]2;+\infty[$ de l'équation : $\ln(x+1) + \ln(x-2) = 2\ln 2$.

Exercice 2 : **(4,5 points)**

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$.

1°/ Donner la solution générale de (E).

2°/ Déterminer la solution particulière f qui vérifie les conditions $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

3°/ Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

On rappelle que : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

4°/ Résoudre alors sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$ l'équation : $f(x) = 1$.

Problème : **(11 points)**

Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1°/ Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2°/ Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

3°/ a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Étudier le signe de f' sur $]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4°/ a) Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α.

b) Montrer que α appartient à l'intervalle $[1{,}1\,;1{,}5]$ et donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

5°/ Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 3.

6°/ Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer la courbe C et la tangente T.

7°/ Soit la fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par : $F(x) = 2\ln(x+2) - \ln(x-1) + x\ln(x^2+x-2) - 2x$.

a) Montrer que F est une primitive de f.

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=3$.

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} cm² près.