# BT AGENCEMENT

# MATHEMATIQUES

**Session 2006**

**Durée : 3 heures**
**Coefficient : 4**

**Matériel autorisé :**
**Calculatrice conformément à la circulaire N°99-186 du 16/11/1999**

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 3 pages, numérotées de 1/3 à 3/3.

## Exercice 1 (*4 points*)

Un *triangle d'or* est un triangle isocèle ayant deux angles de 72°.

L'unité graphique choisie est le cm.
Soit ABC un triangle d'or tel que $AB = AC$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le segment $[AC]$ en $D$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BDC}$ coupe le segment $[BC]$ en $E$.

1. Faire un schéma avec $BC = 10$.

2. Montrer que le triangle $ABD$ est isocèle.

3. Montrer que les triangles $BCD$ et $DEC$ sont des triangles d'or.

4. Dans le triangle $DEC$, reproduire le procédé de construction utilisé précédemment dans le triangle $ABC$ afin d'obtenir au total cinq triangles d'or.

## Exercice 2 (*6 points*)

On considère le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ pour tout réel $x$.

1. Calculer $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. Vérifier que, pour tout réel $x$, on a : $P(x) = (2x+1)(x^2 + 2x - 3)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

4. *a.* En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2(\ln x)^3 + 5(\ln x)^2 - 4(\ln x) - 3 = 0.$$

   *b.* Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation :

$$2(\cos x)^3 + 5(\cos x)^2 - 4\cos x - 3 = 0$$

## Problème (10 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + e^x$.

On note $(C)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $f$.

2. *a*. Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(C)$ en $-\infty$.
   *b*. Etudier la position relative de la courbe $(C)$ et de la droite $(D)$.

3. *a*. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$.
   *b*. Justifier que, pour tout réel $x$, $f'(x) > 0$ .
   *c*. Dresser le tableau de variations de $f$.

4. Déterminer une équation de la tangente $(T)$ à $(C)$ en son point d'abscisse 0.

5. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $[-2; 0]$.
   *a*. En utilisant la calculatrice, donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,01.
   *b*. Donner, en le justifiant, le signe de $f(x)$ pour $x$ variant dans $\mathbb{R}$.

6. Tracer les droites $(D)$ et $(T)$ puis la courbe $(C)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

7. On appelle $\mathcal{P}$ la partie du plan délimitée par les axes du repère, la courbe $(C)$ et la droite d'équation $x = 2$.
   *a*. Hachurer $\mathcal{P}$ sur le schéma.
   *b*. Déterminer la valeur exacte de l'aire, en cm², de $\mathcal{P}$ puis une valeur approchée au mm² de cette aire.

# BREVET DE TECHNICIEN
# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

*Ce formulaire concerne les brevets de technicien préparés en deux ans après la seconde de détermination.*

## I. ALGÈBRE

### A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

*Suites arithmétiques*

Premier terme $u_0$ ; $u_{n+1} = u_n + a$ ; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

*Suites géométriques*

Premier terme $u_0$ ; $u_{n+1} = b\,u_n$ ; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

### B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

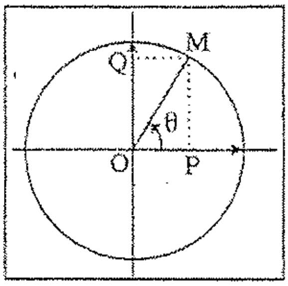
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

### D. *TRIGONOMÉTRIE*




$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

*Valeurs remarquables*

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| tan | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $0$ |

*Formules d'addition*

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$ ; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

## II. ANALYSE

### A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

#### 1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in ]-\infty, +\infty[$ et $y \in ]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

#### 2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

### B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

*Comportement à l'infini*

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ ; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

*Croissances comparées à l'infini*

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

*Comportement à l'origine*

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$ ; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

*Comportement à l'origine de* $\ln(1+x)$, $e^x$, $\sin x$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

## C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

### 1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ | *Intervalle de validité* |
|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $]-\infty, +\infty[$ |
| $x$ | $1$ | $]-\infty, +\infty[$ |
| $x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $n x^{n-1}$ | $]-\infty, +\infty[$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ |
| $\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0, +\infty[$ |
| $x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha x^{\alpha - 1}$ | $]0, +\infty[$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $]0, +\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $]-\infty, +\infty[$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $]-\infty, +\infty[$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $]-\infty, +\infty[$ |

### 2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(kf)' = kf'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $u$ à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$

## D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

*Formule de Chasles*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

*Linéarité*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

*Positivité*

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$

*Intégration d'une inégalité*

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

*Valeur moyenne de* f *sur* $[a, b]$ : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$

## E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

| Équation | Solutions sur $]-\infty, +\infty[$ |
|---|---|
| $y' - ay = 0$ | $f(x) = k e^{ax}$ |
| $y'' + \omega^2 y = 0$ | $f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ |