

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR**Épreuve de Mathématiques****GROUPEMENT C***Durée : 2 heures*

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	1
Charpente-couverture	1,5
Communication et industrie graphique	2
Étude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux	2
Industries céramiques	2
Industries céréalières	2
Industries des matériaux souples (2 options)	1
Industries papetières	2
Mise en forme des alliages moulés	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique bois et ameublement	1,5
Productique textile (4 options)	3
Réalisation d'ouvrages chaudronnés	2
Systèmes constructifs bois et habitat	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Plus le formulaire de mathématiques page 1 à 5

Une feuille de papier millimétré sera distribuée avec la copie

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

CALCULATRICE AUTORISÉE

Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.

Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.

EXERCICE 1 (10 points)

y désigne une fonction de la variable x , définie et deux fois dérivable sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels.

Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y suivante : $y'' - 4y' + 3y = -3x - 2$.

Partie A

- Résoudre sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels, l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$.
- Soit a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par $g(x) = ax + b$. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit une solution particulière de l'équation (E).
 - Résoudre l'équation (E).
- Déterminer la fonction f , solution particulière sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels de l'équation (E), telle que : $f(0) = -1$ et $f''(0) = 9$.

Partie B

Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = e^{3x} - x - 2$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- En remarquant que, pour x différent de 0, $f(x) = x \left(\frac{e^{3x}}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels.
- Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques :
 - 4 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses,
 - 1 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.
 Montrer que la courbe \mathcal{C} admet pour asymptote la droite \mathcal{D} d'équation $y = -x - 2$ au voisinage de $-\infty$.
- Déterminer les positions relatives de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} selon les valeurs de x .
- Tracer \mathcal{D} et \mathcal{C} .

Partie C

Calculer l'aire \mathcal{A} , en cm^2 , du domaine compris entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} . Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de \mathcal{A} .

EXERCICE 2 (10 points)

On donnera la valeur arrondie au millième de chacun des résultats de cet exercice.

Une entreprise fabrique des jouets en bois en grande série. On s'intéresse à l'une des pièces de ce jouet comportant une partie cylindrique permettant l'assemblage des différents éléments du jouet.

Partie A

Pour que l'assemblage soit réalisable, c'est-à-dire que la pièce étudiée soit conforme, le diamètre de la partie cylindrique doit être compris entre 13,7 mm et 14,2 mm.

Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe le diamètre de la partie cylindrique. On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}(14 ; 0,1)$.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise soit conforme.

Partie B

Dans cette partie, on considère que 2,4 % des pièces de la production ne sont pas conformes.

Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 unités prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces non conformes. On admet que la production de l'entreprise est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse. En donner le (ou les) paramètre(s).
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités ?
3. a. On approche la variable aléatoire Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.
b. À l'aide de la variable aléatoire Z , calculer une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités.

Partie C

L'assemblage des pièces du jouet doit être définitif. Ainsi, la partie cylindrique de la pièce étudiée dans les parties A et B est enduite de colle avant l'assemblage.

Le jouet est destiné à des enfants de moins de 36 mois. Ces enfants ne doivent en aucun cas pouvoir arracher la pièce du jouet, celle-ci présentant un risque d'ingestion.

Pour cette raison, l'entreprise réalise un test d'arrachement sur des échantillons de 50 jouets prélevés au hasard. Ces prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise, compte tenu du grand nombre de jouets produits.

Soit \bar{R} la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 jouets, associe la résistance mécanique moyenne de l'assemblage. Cette résistance mécanique est exprimée en déca-newton, noté daN.

Soit r la résistance mécanique moyenne de l'ensemble des jouets produits par l'entreprise. On admet que \bar{R} suit la loi $\mathcal{N}\left(r; \frac{1}{\sqrt{50}}\right)$.

On construit un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1 %, destiné à savoir si la résistance mécanique moyenne des assemblages est égale à 10 daN.

On donne l'hypothèse alternative $H_1 : r > 10$.

1. Donner l'hypothèse H_0 .
2. Sous l'hypothèse H_0 , quelle est la loi suivie par \bar{R} ?
3. Sous l'hypothèse H_0 , calculer le réel h tel que $P(\bar{R} \leq 10 + h) = 0,99$.
4. Quelle est la règle de décision du test ?
5. a. Sur un échantillon de 50 jouets, on a relevé les résistances exprimées dans le tableau ci-dessous. Calculer la moyenne r_e et l'écart type σ_e de cet échantillon. *Aucune justification de ces résultats n'est demandée.*

Résistance (daN)	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13
Effectifs	1	0	1	3	9	9	10	9	3	2	2	1

- b. Au seuil de risque de 1 %, et d'après cet échantillon, les jouets produits par l'entreprise sont-ils assez solides ?

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

B.T.S. : groupement C

AGROÉQUIPEMENT

CHARPENTE-COUVERTURE

COMMUNICATION ET INDUSTRIE GRAPHIQUE

**ÉTUDE ET RÉALISATION D'OUTILLAGES DE MISE EN FORME DES
MATÉRIAUX**

INDUSTRIES CÉRAMIQUES

INDUSTRIES CÉRÉALIÈRES

INDUSTRIES DES MATÉRIAUX SOUPLES (2 OPTIONS)

INDUSTRIES PAPETIÈRES

MISE EN FORME DES ALLIAGES MOULÉS

MISE EN FORME DES MATÉRIAUX PAR FORGEAGE

PRODUCTIQUE BOIS ET AMEUBLEMENT

PRODUCTIQUE TEXTILE (4 OPTIONS)

RÉALISATION D'OUVRAGES CHAUDRONNÉS

SYSTÈMES CONSTRUCTIFS BOIS ET HABITAT

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{a+it} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc sin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc tan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{\eta t} + \mu e^{\eta_2 t}$ où η_1 et η_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{\eta t}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $\eta_1 = \alpha + i\beta$ et $\eta_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,099	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

c) Loi exponentielle

Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ (M.T.B.F.)}$$

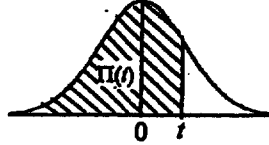
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$