CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

BTS – GROUPEMENT C
MATHEMATIQUES – SESSION 2006

EXERCICE 1 : **10 points**

Questions	Éléments de correction	Points
A – 1)	Résolution de l'équation différentielle $y''-4y'+3y=0$: L'équation caractéristique de cette équation a pour racines réelles : 1 et 3. Ses solutions sont les fonctions définies sur **R** : $x \mapsto \alpha e^{x}+\beta e^{3x}$ où α et β sont deux constantes réelles	1
A – 2) a)	Calcul des réels a et b : Les réels a et b sont tels que : pour tout réel x, $-4a+3(ax+b)=-3x-2$, soit pour tout réel x, $3(a+1)x+3b-4a+2=0$. On en déduit que : $a=-1$ et que $b=-2$. D'où, pour tout x réel, $g(x)=-x-2$	1
A – 2) b)	Résolution de l'équation (E) : Les solutions de (E) sont les fonctions sommes des fonctions solutions de $y''-4y'+3y=0$ et de la solution particulière g ; donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur **R** par $f(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{3x}-x-2$ où α et β sont deux constantes réelles.	0,5
A – 3)	Solution particulière de (E) satisfaisant les conditions $f(0)=-1$ et $f''(0)=9$: $f(0)=-1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$ et $f''(0)=9 \Leftrightarrow \alpha+9\beta=9$; on en déduit que : $\alpha=0$ et $\beta=1$. La fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x)=e^{3x}-x-2$.	1
B – 1)	Limite de f en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-2)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	0,5
B- 2)	Limite de f en $+\infty$: Pour tout réel x non nul, on vérifie que $f(x)=x\left(\dfrac{e^{3x}}{x}-1-\dfrac{2}{x}\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}-1-\dfrac{2}{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$. On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	1

B – 3)	$f'(x) = 3e^{3x} - 1$ et $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{\ln 3}{3}$ x : $-\infty$; $-\frac{\ln 3}{3}$; $+\infty$ $f'(x)$: $-$; 0 ; $+$ $f(x)$: $+\infty$ ↘ $\frac{-5+\ln 3}{3}$ ↗ $+\infty$	1,5
B – 4)	$f(x) - (-x-2) = e^{3x}$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{3x} = 0$, on en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite $\mathscr{D}$ pour asymptote au voisinage de $-\infty$.	0,5
B – 5)	Pour tout réel x, $f(x) - (-x-2) = e^{3x}$ et donc pour tout réel x, $f(x) - (-x-2) > 0$. La courbe $\mathscr{C}$ est toujours au dessus de la droite $\mathscr{D}$.	0,5
B – 6)	Construction de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.	1
C	$\mathscr{A} = 4 \times \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} (f(x) - (-x-2))\mathrm{d}x = 2\left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{2}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-6}\right)$ d'où $\mathscr{A} = \frac{2}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-6}\right)\mathrm{cm}^2 \approx 0{,}67\ \mathrm{cm}^2$.	1,5

EXERCICE 2 : 10 points

Questions	Éléments de correction	Points
A	Probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme : La variable aléatoire $T_X = \dfrac{X-14}{0,1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. $P(13,7 \le X \le 14,2) = P(-3 \le T_X \le 2) = \Pi(2) - \Pi(-3) \approx 0,976$	1
B – 1)	On est en présence d'une épreuve aléatoire élémentaire pouvant déboucher sur deux résultats seulement, la pièce produite est conforme, évènement de probabilité 0,976 et la pièce produite est non conforme, évènement de probabilité 0,024. On réalise 100 fois cette épreuve élémentaire de façon indépendante car le prélèvement opéré est assimilé à un tirage avec remise. La variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;\,0,024)$.	1
B – 2)	$P(Y \ge 3) = 1 - P(Y \le 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P(Y=k) = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{100}^{k}\, 0,024^k\, 0,976^{100-k} \approx 0,432$.	1
B – 3) a)	Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 100 \times 0,024 = 2,4$.	0,5
B – 3) b)	Estimation de la probabilité qu'il y ait exactement trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités : $P(Z=3) = \dfrac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} \approx 0,209$.	1
C – 1)	$H_0 : r = 10$.	0,5
C – 2)	Sous l'hypothèse H_0, $\overline{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(10\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{50}}\right)$.	0,5
C – 3)	La variable aléatoire $T_{\overline{R}} = \dfrac{\overline{R}-10}{\frac{1}{\sqrt{50}}} = \sqrt{50}\left(\overline{R}-10\right)$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. $P\left(\overline{R} \le 10 + h\right) = 0,99 \Leftrightarrow P\left(T_{\overline{R}} \le h\sqrt{50}\right) = 0,99$ $\Leftrightarrow \Pi\left(h\sqrt{50}\right) = 0,99 \approx \Pi(2,33) \Leftrightarrow h \approx 0,330$ Par lecture inverse de la table, on obtient : $h\sqrt{50} \approx 2,33$, soit $h \approx 0,330$.	2
C – 4)	Règle de décision du test : Soit r_e la résistance moyenne d'un échantillon de 50 jouets. Si $r_e \le 10,330$, alors H_0 est acceptée. Sinon, l'hypothèse H_0 est rejetée au profit de H_1.	1

C- 5) a)	Moyenne et écart-type de l'échantillon : $r_e \approx 10,38$ et $\sigma \approx 1,042$.	1
C – 5) b)	L'échantillon prélevé est tel que $r_e > 10,33$ donc l'hypothèse H_0 est rejetée au profit de H_1. Au seuil de risque de 1 %, et d'après cet échantillon, les jouets produits par l'entreprise sont assez solides.	0,5

Exercice 1 : B-6)