SESSION 2007

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Matériel autorisé :
- Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).

Aucun document autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4 et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

Code sujet : CHMAT-P07

Exercice 1 – (8 points)

Deux chaînes de production C_A et C_B d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent, en très grande quantité, le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne C_A (respectivement C_B), associe sa masse en mg.
   On sait que X_A (respectivement X_B) suit la loi normale de paramètres $(m_A\,;\,\sigma_A)$ (respectivement $(m_B\,,\,\sigma_B)$).
   Un comprimé est jugé conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.

   a) On donne $m_A = 896$ mg et $\sigma_A = 10$ mg. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans C_A soit conforme.

   b) On donne $m_B = 900$ mg. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par C_B soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart type σ_B.

2. Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne C_A et 60 % de la chaîne C_B.
   La chaîne C_A produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne C_B en produit 3 %.
   On prélève au hasard un comprimé dans la production du laboratoire.
   On note A l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_A »,
   B l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne C_B »,
   C l'événement « Le comprimé est conforme ».

   a) A partir de l'énoncé, déterminer les probabilités des événements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B que l'on notera respectivement $P_A(C)$ et $P_B(C)$.

   b) Calculer alors la probabilité P(C) de l'événement C.

   c) On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne C_A.

3. Le contrôleur qualité n'étant pas satisfait de la production de la chaîne C_A , il décide de la faire régler. Après ce réglage, on teste l'hypothèse nulle H_0 : $m_A = 900$ mg, contre l'hypothèse alternative H_1 : $m_A \neq 900$ mg, au seuil de risque 5 %. On désigne par $\overline{X_A}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon non exhaustif de taille 100, associe sa masse moyenne en mg. Sous H_0, on admet que $\overline{X_A}$ suit la loi normale de paramètres (900 ; 1).

   a) Déterminer le nombre réel positif h tel que : $P(900 - h \leq \overline{X_A} \leq 900 + h) = 0{,}95$.

   b) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

   c) Un tirage de 100 comprimés dans la production de la chaîne C_A est effectué. La masse moyenne obtenue est $\overline{x} = 899$ mg. Appliquer le test.

Exercice 2 – (12 points)

Étude de la cinétique de deux réactions successives du 1er ordre

On considère les réactions successives suivantes :

$$A \xrightarrow[k_1]{} B \xrightarrow[k_2]{} C$$

où k_1 et k_2 désignent des nombres réels strictement positifs.

On désigne par $a - x$, y et z les concentrations en mol.L^{-1} à l'instant t des produits A, B et C (t est exprimé en minutes), a désignant la concentration à l'instant $t = 0$ du produit A, seul présent au début de la réaction.

x, y et z sont des fonctions de t définies sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

D'après la conservation de la matière on a : $x = y + z$. Les lois cinétiques donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_1(a-x) & (1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k_1(a-x) - k_2 y & (2) \\ z = x - y & (3) \end{cases}$$

<u>Partie A :</u>

1. L'équation (1) s'écrit aussi : $x' + k_1 x = k_1 a$ (E_1) avec k_1 nombre réel positif non nul.

   a) Résoudre l'équation homogène (E_0) : $x' + k_1 x = 0$.

   b) Déterminer une solution particulière $x_p(t)$ de (E_1) sous la forme d'une fonction constante.

   c) En déduire la solution générale de (E_1).

   d) Sachant que la solution x de (E_1) cherchée vérifie $x(0) = 0$, montrer que : $x(t) = a(\,1 - \mathrm{e}^{-k_1 t}\,)$.

2. On suppose, dans cette question, que k_1 et k_2 sont des nombres réels positifs distincts.

a) Montrer que l'équation (2) équivaut à (E_2) : $y' + k_2 y = k_1 a\, e^{-k_1 t}$.

b) Résoudre l'équation homogène (E'_0) : $y' + k_2 y = 0$.

c) Déterminer une solution particulière $y_p(t)$ de (E_2) sous la forme $y_p(t) = \lambda e^{-k_1 t}$ où λ est une constante réelle à déterminer.

d) En déduire la solution générale de (E_2).

e) Sachant que $y(0) = 0$, montrer que : $y(t) = \dfrac{ak_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$.

3. Donner l'expression de $z(t)$.

Partie B : **Étude d'un exemple**

Cas de la réduction d'un sel mercurique : $Hg^{2+} \longrightarrow Hg^{+} \longrightarrow Hg$
(en présence de H_2 sous pression constante)

avec $a = 10^{-3}$ mol.L^{-1}, $k_1 = 0{,}0283$ min^{-1} et $k_2 = 0{,}0033$ min^{-1}

1. Vérifier que $z(t) = 10^{-3}(1 + 0{,}132\, e^{-0{,}0283t} - 1{,}132\, e^{-0{,}0033t})$.

2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t)$.

3. Déterminer la dérivée de la fonction z.

4. Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif, $e^{-0{,}0283t} < e^{-0{,}0033t}$.
5. En déduire le signe de $z'(t)$ et le sens de variation de z sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\mathrm{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\mathrm{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) **Loi binomiale** $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle**

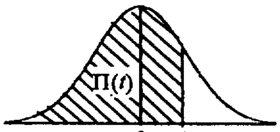
Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$ $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$