

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2007

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures

coefficient : 2

Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :

« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.

Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- 5 pages numérotées de la page 1/5 à 5/5,
- une annexe (papier millimétré),
- le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.

E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

—— Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices. ——

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

—— Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet. ——

EXERCICE

(5 points)

Cet exercice est un Q.C.M (questionnaire à choix multiples). Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, il n'existe qu'une seule affirmation correcte.

Le candidat présentera les résultats en reproduisant et en complétant sur sa copie un tableau ayant l'aspect suivant :

Question	1	2	3	4	5
Affirmation correcte :					

Barème envisagé : +1 point par réponse exacte, -0,5 point par réponse fausse, 0 point pour absence de réponse. (Un éventuel résultat négatif serait ramené à zéro)

Question 1 - Logique

Soit f une fonction de la variable x , définie sur \mathbf{R} .

On considère l'énoncé suivant : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) > 0$ ».

La négation de cette proposition est :

- A : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) < 0$ » ;
 B : « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) \leq 0$ » ;
 C : « Pour tout réel x , $f(x) < 0$ » ;
 D : « Pour tout réel x , $f(x) \leq 0$ ».

Question 2 - Matrices

Soit a un nombre réel non nul.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice M^2 est égale à :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 3 - Calcul booléen

	b	\bar{b}	\bar{b}	b
a				
\bar{a}				
	c	c	\bar{c}	\bar{c}

On considère E , fonction des variables booléennes a, b et c dont une expression est :

$E = abc + a\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c.$

E est représentée dans le tableau de Karnaugh ci contre (partie hachurée).

Une autre expression de E est :

$A = a + b\bar{c}$; $B = ac + \bar{b}c$; $C = \bar{a}c + c$; $D = (1 + \bar{c})(1 + a).$

Question 4 - Graphes

Le graphe G comporte quatre sommets x, y, z et t .

On donne sa matrice d'adjacence : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

- A : Le sommet x possède exactement deux successeurs ;
- B : Le chemin $y-z-x$ est possible ;
- C : Le chemin $t-x-z$ est possible ;
- D : Le sommet z est un prédécesseur du sommet t .

Question 5 - Graphes

On utilise le même graphe que dans la question 4. Choisir la proposition exacte parmi les quatre suivantes :

- A : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 5 ;
- B : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 6 ;
- C : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 7 ;
- D : Le nombre de chemins de longueur 3 d'origine le sommet x et d'extrémité le sommet z est égal à 8.

EXERCICE N°2**(7 points)**

L'exercice porte sur la fréquentation d'une pharmacie implantée dans un petit centre commercial.
Les trois parties sont indépendantes.

Partie A Loi binomiale

Après avoir effectué une étude statistique, on admet qu'un passant pris au hasard dans la galerie marchande entre dans la pharmacie avec une probabilité de 0,15.

On prélève, de façon aléatoire, un échantillon de 40 usagers de la galerie marchande. (On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.) On désigne par X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de personnes qui entrent dans la pharmacie, parmi les 40 usagers de l'échantillon.

- a) Justifier le fait que la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Préciser ses paramètres.
b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
Par une phrase simple, en donner une interprétation.
2. Calculer les probabilités $P(X=0)$ et $P(X \geq 1)$. (On donnera les valeurs arrondies à la quatrième décimale.)

Dans la rédaction, les candidats pourront utiliser à leur choix l'une des deux notations : $\binom{n}{p}$ ou C_n^p .

Partie B Loi normale

Soit Y la variable aléatoire, qui, un jour donné, décompte le nombre de clients entrés dans la pharmacie entre 18 heures et 19 heures. On admet que la variable Y suit la loi normale $\mathcal{N}(30; 4)$.

1. Calculer avec la précision de la table, les probabilités $P(Y \geq 34)$ et $P(26 \leq Y \leq 34)$.
2. Déterminer, en utilisant la valeur au plus près dans la table, le nombre réel a tel que : $P(Y \geq a) = 0,04$.

En arrondissant le nombre a à l'entier le plus proche, traduire par une phrase cette dernière égalité.

Partie C Somme de deux variables aléatoires

Dans le passé, la pharmacie disposait aussi d'un second accès (par le parking).

La variable aléatoire Z_1 prend pour valeurs le nombre de clients qui entraient dans la pharmacie par la galerie (entre 18 et 19 heures), et suit la loi normale $\mathcal{N}(20; 2)$.

La variable aléatoire Z_2 prend pour valeurs le nombre de clients qui entraient dans la pharmacie (entre 18 et 19 heures) par le parking et suit la loi normale $\mathcal{N}(15; 3)$.

On suppose de plus que les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

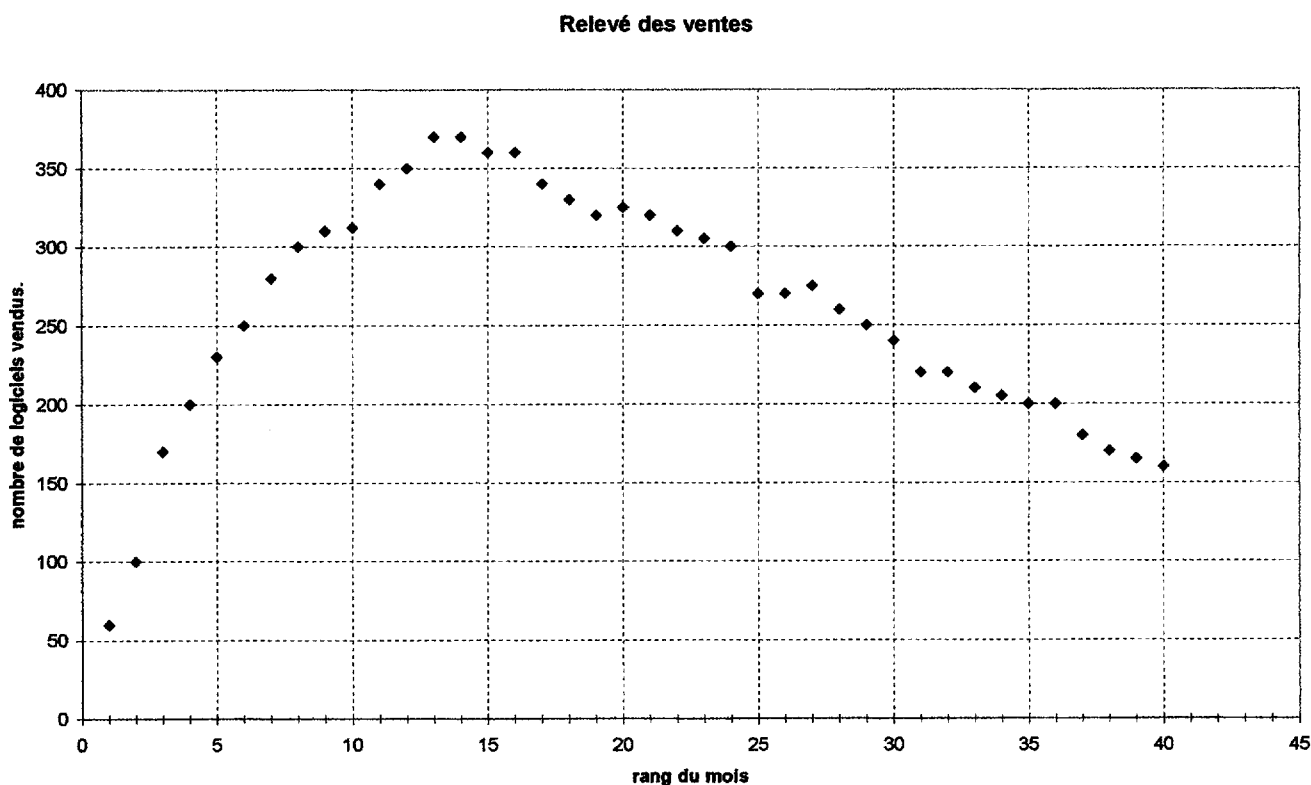
1. Que mesure la variable aléatoire $Z = Z_1 + Z_2$?
2. Sachant que Z suit une loi normale, déterminer ses paramètres (moyenne et écart-type.)

EXERCICE N°3**(8 points)****Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.**

Une entreprise réalise une étude de marché avant de commercialiser des logiciels à usage professionnels.

Partie A Exploitation statistique d'un modèle passé.

Des concurrents ont récemment vendu un produit similaire. Le nombre de logiciels vendus chaque mois est donné par le graphique ci-dessous :



Un extrait est fourni dans le tableau suivant :

Rang du mois : x_i	1	6	11	16	21	26	31	36
Nombre de logiciels vendus : z_i	60	250	340	360	320	270	220	200

(Exemple de lecture des données : le onzième mois, il s'est vendu 340 logiciels)

1. Sans calcul, justifier le fait qu'un ajustement linéaire n'est pas approprié.
2. Reproduire et compléter le tableau suivant : (les valeurs de y_i seront arrondies au centième).

Rang du mois : x_i	1	6	11	16	21	26	31	36
$y_i = \ln\left(\frac{z_i}{x_i}\right)$	4,09						1,96	1,71

3. La corrélation linéaire entre les séries (x_i) et (y_i) étant forte (le coefficient de corrélation linéaire r est environ égal à $-0,999$), on décide de procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
Donner une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont deux réels arrondis au millième. (Aucun détail de calcul n'est demandé dans cette question.)
4. En prenant des arrondis plus larges des valeurs de a et de b , on obtient : $\ln\left(\frac{z}{x}\right) = -0,07x + 4$.
Exprimer alors z en fonction de x .

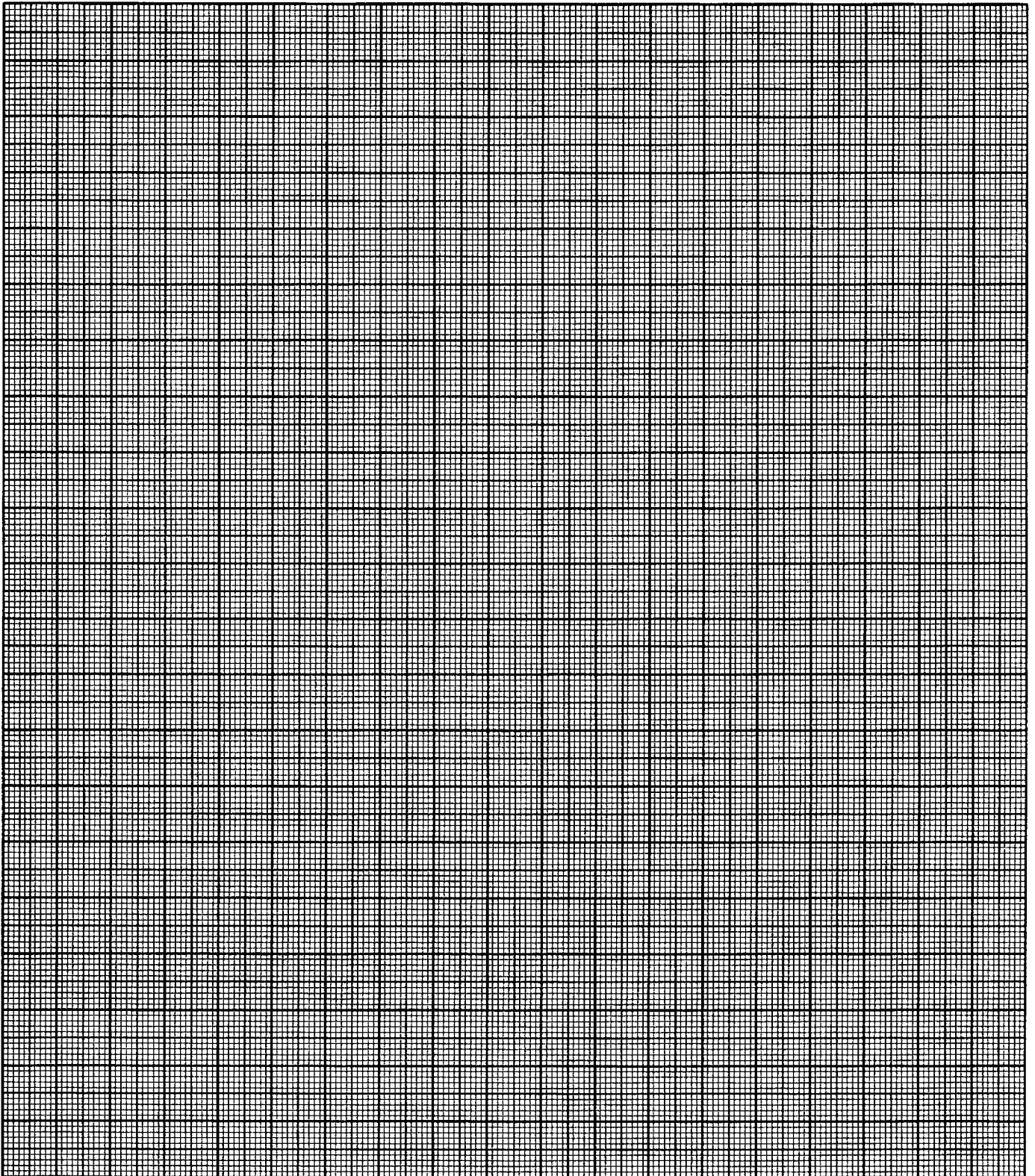
Partie B Perspectives.

L'équipe commerciale envisage de mener une campagne plus dynamique, pour son nouveau produit plus complet :

Le nombre mensuel des ventes serait modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 36]$ par : $f(x) = 100xe^{-0,1x}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction u définie pour $x \geq 0$ par : $u(x) = e^{-0,1x}$; en déduire la dérivée de la fonction f .
Justifier le fait que le signe de la dérivée de f est le même que celui de $(10 - x)$.
2. Dresser alors le tableau de variations de la fonction f .
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f . (Le choix d'unités efficaces est laissé à l'initiative du candidat.)
4. L'entreprise arrêtera la commercialisation du produit dès que le nombre de ventes repassera au dessous de 150 unités par mois. Déterminer à l'aide du graphique ou de la calculatrice, à partir de quel mois cessera cette commercialisation.

ANNEXE



Formulaire de mathématiques

B.T.S. INFORMATIQUE DE GESTION

1. RELATIONS FONCTIONNELLES :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0 ;$$

$$\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(k u)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^a)' = a u^{a-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t) x' + b(t) x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$

3. **PROBABILITES :**

a) **Loi binomiale** $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X) = np$ $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

$E(X) = \lambda$

$V(X) = \lambda$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

$k \backslash \lambda$	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)**

Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.)

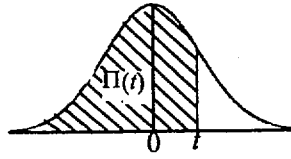
$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$