

# BREVET DE TECHNICIEN FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ce formulaire concerne les brevets de techniciens préparés en deux ans après la seconde de détermination.

## I. ALGÈBRE

### A. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

#### Suites arithmétiques

Premier terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = u_n + a$  ;  $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

#### Suites géométriques

Premier terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = bu_n$  ;  $u_n = u_0 b^n$

Si  $b \neq 1$ ,  $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si  $b = 1$ ,  $S_n = n + 1$

### B. IDENTITÉS REMARQUABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

### C. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient  $a, b, c$  des nombres réels,  $a \neq 0$ , et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet :

- si  $\Delta > 0$ , deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

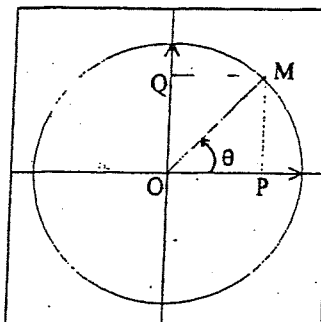
- si  $\Delta = 0$ , une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si  $\Delta < 0$ , aucune solution réelle.

$$\Delta \geq 0, ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

### D. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \theta \simeq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

#### Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

#### Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) ; \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

## II. ANALYSE

### A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

#### 1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\text{Si } x \in ]-\infty, +\infty[ \text{ et } y \in ]0, +\infty[,$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$\ln e = 1$$

$$y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$e^0 = 1$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

#### 2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, +\infty[ \text{ et } y \in [0, +\infty[,$$

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

### B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS

#### Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

#### Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

#### Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

#### Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$ , $e^x$ , $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
$k$	$0$	$]-\infty, +\infty[$
$x$	$1$	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nx^{n-1}$	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. CALCUL INTÉGRAL

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si  $a \leq b$  et  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ .

Intégration d'une inégalité

Si  $a \leq b$  et  $f \leq g$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Si  $a \leq b$  et  $m \leq f \leq M$ ,

alors  $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{\alpha x}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$