BREVET DE TECHNICIEN

TOPOGRAPHE

session 2007

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 h **Coefficient : 5**

– SUJET –

Dès la remise du sujet, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 2 **exercices et 1 problème indépendants.**

Il sera tenu compte de la présentation.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : (5 points)

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}.$$

1. Calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Calculer les réels a ,b et c tels que :

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

3. Résoudre $P(x) = 0$.
4. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations :

   a) $(\sin x)^3 - \frac{9}{2}(\sin x)^2 - 3\sin x + \frac{5}{2} = 0$

   b) $e^{3x} - \frac{9}{2}e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{2} = 0$

Exercice 2 : (4 points)

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 9y = 0.$$

2. On désigne par f la solution particulière de l'équation différentielle (E) telle que :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

   Déterminer une expression de $f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Problème : **(11 points)**

- Partie A –

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble des réels, donnée par $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ où a et b sont des réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.

Sur le graphique ci-après, on a représenté $\mathscr{C}$, courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

On admet que la droite D passe par le point A (0, 4) et est tangente à $\mathscr{C}$ en ce point A.

1°/ À l'aide d'une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

2°/ Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.

3°/ Donner les expressions de $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de a et b. Puis calculer a et b.

4°/ En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

- Partie B –

On suppose que f est définie sur l'ensemble des réels par $f(x)=(2x+3)e^{-x}+1$.

1°/ Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2°/ Déterminer la limite de f en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$. En déduire l'équation d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3°/ a) Vérifier que pour tout x réel, on a $f'(x)=(-2x-1)e^{-x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4°/ Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5°/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution x_0 dans l'intervalle $[-2,-1]$.
Donner une valeur approchée de x_0 à 0,1 près.

- Partie C –

1°/ Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (-2x-2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = 2xe^{-x}$. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2°/ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$.
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à 10^{-2} près.