BT AGENCEMENT

MATHÉMATIQUES

Session 2007

Durée : 3 heures
Coefficient : 3

<u>Matériel autorisé</u> :

Calculatrice conformément à la circulaire N° 99-186 du 16/11/1999

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 *(3 points)*

Soit f et g les fonctions définies sur **R** par $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ et $g(x)=\dfrac{-x-1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Soit g' la fonction dérivée de g. Déterminer $g'(x)$.
2. En déduire que la fonction g est une primitive sur **R** de la fonction f.
3. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2 *(7 points)*

L'unité choisie est le cm.
Soit A et B deux points tels que AB = 6.

1. Construire un demi-cercle (C) de centre A et de rayon $r=3$ (situé d'un même côté de la droite (AB)) et le cercle (C') de centre B et de rayon $r'=1,5$.
2. Construire le point I du segment $[\mathrm{AB}]$ tel que $\dfrac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IB}}=\dfrac{r}{r'}=2$.
3. Construire le cercle de diamètre $[\mathrm{AI}]$.
   Ce cercle coupe le demi-cercle (C) en un point qu'on appelle F. La parallèle à la droite (AF) et passant par le point B coupe la droite (IF) en un point que l'on appelle G. Construire le point G.
4. *a.* Montrer que le triangle FAI est rectangle.
   b. En déduire que la droite (FG) est tangente à (C) en F.
5. *a.* Montrer que les droites (FG) et (BG) sont perpendiculaires.
   b. Calculer la longueur BG.
   c. En déduire que le point G appartient au cercle (C') et que la droite (BG) est tangente à (C') en G.

Problème *(10 points)*

Partie A

Soit P le polynôme défini sur $\mathbf{R}$ par $P(x) = -x^2 + 2x + 8$.

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
2. Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x. Présenter les résultats à l'aide d'un tableau.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-2;4[$ par $f(x) = \ln\left(-x^2 + 2x + 8\right)$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.

1. *a.* Calculer $\lim\limits_{x \to -2}\left(-x^2 + 2x + 8\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.
   b. On admettra que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$.
   Interpréter graphiquement les limites obtenues.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]-2;4[$. Déterminer $f'(x)$.
3. *a.* Justifier que, pour tout x de $]-2;4[$, $f'(x)$ a le même signe que $-2x+2$.
   (On pourra utiliser la partie A)
   b. Résoudre dans $]-2;4[$, l'inéquation $-2x+2 \ldots 0$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f (on y fera apparaitre la valeur exacte du maximum de f).
4. On appelle A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et -1.
   a. Calculer $f'(-1)$ et donner une équation de la tangente à (C) en A.
   b. Construire les asymptotes à la courbe (C), les tangentes à (C) en A et B puis la courbe (C).
   (On ne demande pas de déterminer une équation de la tangente à (C) en B)

Partie C

On appelle A la partie du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.

1. Hachurer A sur la figure.
2. Montrer que l'aire en cm^2 de A est inférieure à $4\ln 9$.

BREVET DE TECHNICIEN
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ce formulaire concerne les brevets de technicien préparés en deux ans après la seconde de détermination.

I. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = b\,u_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

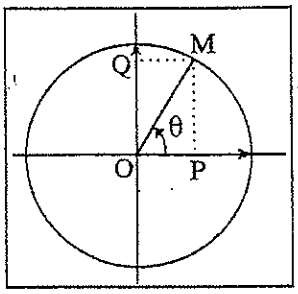
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

D. *TRIGONOMÉTRIE*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(kf)' = kf'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f *sur* [a ,b] : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équation	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = k e^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos \omega x + B \sin \omega x$