CORRIGE

•

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

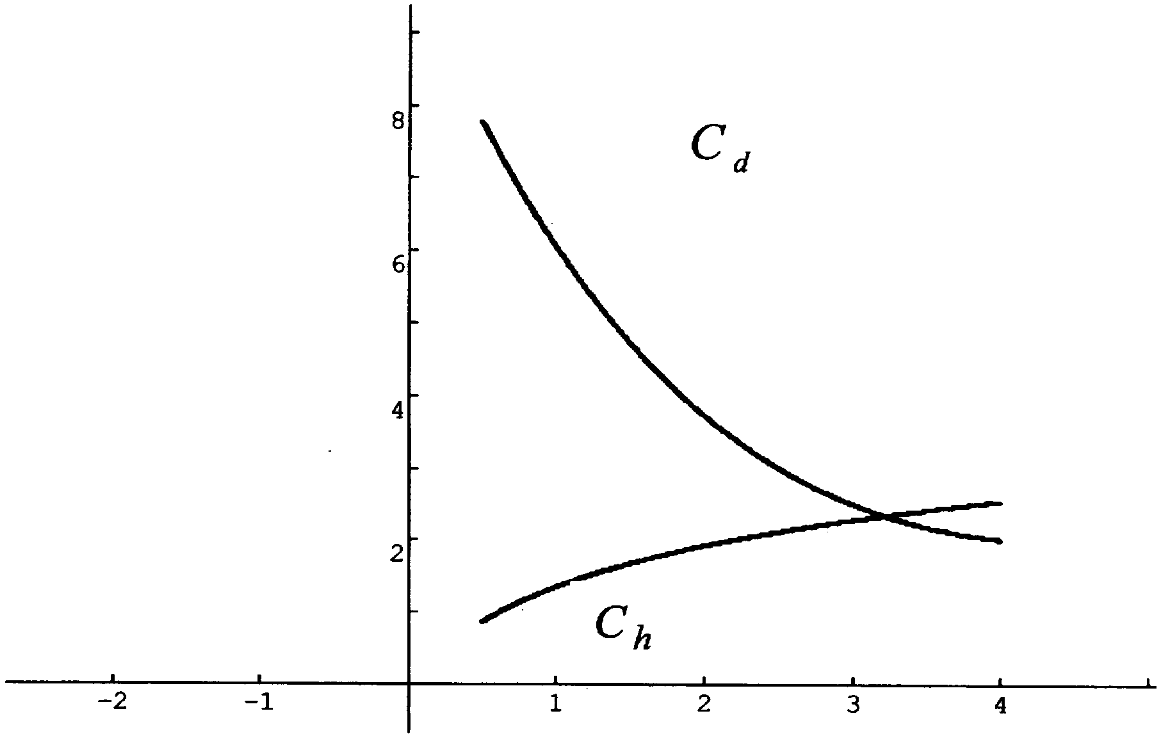
BTS – GROUPEMENT C
MATHEMATIQUES – SESSION 2007

EXERCICE 1 : 10 points

<table>
<tr><th>Questions</th><th>Éléments de correction</th><th>Points</th></tr>
<tr><td>A – 1)</td><td><u>Résolution de l'équation différentielle :</u> $y' + 0{,}4\,y = 0$:
Cette équation différentielle est de la forme $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$ avec $a(x)=1$ et $b(x)=0{,}4$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)} = \dfrac{0{,}4}{1}$ est définie sur l'ensemble des nombres réels par $G(x)=0{,}4x$.
Les solutions de l'équation sont définies sur l'ensemble des nombres réels par $h(x) = k\,\mathrm{e}^{-G(x)}$ donc $h(x) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}4x}$ où k est une constante réelle quelconque.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>A – 2)a)</td><td><u>Calcul des réels a et b</u>
La fonction g, définie pour tout réel x par $g(x) = ax + b$ est une solution particulière de l'équation (E) si et seulement si pour tout x réel $g'(x) + 0{,}4\,g(x) = 0{,}4x - 1$. On en déduit $a = 1$ et $b = -5$, par suite $g(x) = x - 5$.</td><td rowspan="2">1,5</td></tr>
<tr><td>A – 2)b)</td><td><u>Résolution de l'équation (E) :</u> $y' + 0{,}4\,y = 0{,}4x - 1$:
Les solutions sont les fonctions sommes des fonctions obtenues à la question 1 et de la fonction g, c'est à dire l'ensemble des fonctions définies sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = h(x) + g(x)$, soit $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}4x} + x - 5$ où k est une constante réelle quelconque.</td></tr>
<tr><td>A – 3)</td><td><u>Détermination de la fonction f telle que</u> $f(0) = 10$
La condition $f(0) = 10$ se traduit par $k\,\mathrm{e}^{0} + 0 - 5 = 10$ c'est à dire $k = 15$ par suite $f(x) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}4x} + x - 5$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A – 4)a)</td><td><u>Calcul de $d'(x)$</u>
$d'(x) = -6\,\mathrm{e}^{-0{,}4x} + 1$.
<u>Variations de d</u>
Les inéquations suivantes sont équivalentes $d'(x) \geq 0$; $-6\,\mathrm{e}^{-0{,}4x} + 1 \geq 0$; $6\,\mathrm{e}^{-0{,}4x} \leq 1$; $\mathrm{e}^{-0{,}4x} \leq \dfrac{1}{6}$; $-0{,}4x \leq \ln(\dfrac{1}{6})$; $x \geq -\dfrac{1}{0{,}4}\ln(\dfrac{1}{6})$; $x \geq 4{,}4$... donc pour tout réel x de [0,5 ;4], $d'(x) \leq 0$. Par suite la fonction d est décroissante sur [0,5 ;4].</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>A – 4)b)</td><td>Construction de la courbe C_d.</td></tr>
<tr><td>B - 1)a)</td><td><table><tr><td>z</td><td>0,9</td><td>1,4</td><td>1,7</td><td>1,9</td><td>2,1</td><td>2,3</td><td>2,4</td><td>2,6</td></tr><tr><td>$Z=\mathrm{e}^{z}$</td><td>2,46</td><td>4,06</td><td>5,47</td><td>6,69</td><td>8,17</td><td>9,97</td><td>11,02</td><td>13,46</td></tr></table></td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>B - 1)b)</td><td><u>Equation de la droite de régression de Z en x :</u>
La calculatrice donne $a = 3{,}018\ldots$ et $b = 0{,}8707\ldots$ donc $Z = 3\,x + 0{,}9$.</td></tr>
<tr><td>B – 1)c)</td><td>$Z=\mathrm{e}^{z} = 3\,x + 0{,}9$ donc $z = \ln(3x + 0{,}9)$.</td></tr>
<tr><td>B – 2)a)</td><td><u>Calcul de $h'(x)$</u> : $h(x)=\ln(3x+0{,}9)$ donc $h'(x)=\dfrac{3}{3x+0{,}9}$.
<u>Variations de h</u> Les inéquations suivantes sont équivalentes $h'(x) \geq 0$; $3x+0{,}9 \geq 0$.
Par suite la fonction h est croissante sur [0,5 ; 4].</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>B – 2)b)</td><td>Construction de la courbe C_h.</td></tr>
<tr><td>B – 2)c)</td><td>On peut lire 3,2 euros.</td></tr>
</table>

EXERCICE 2 : 10 points

Questions	Éléments de correction	Points
A – 1)	La probabilité de prélever au hasard un stylo provenant de la chaîne C_1 et non conforme est $0{,}06 \times 0{,}4 = 0{,}024$.	0,5
A – 2)	Calcul de t $0{,}024 + 0{,}6 \times t = 0{,}09$ par suite $t = 0{,}11$ soit 11 % de stylos non conformes sont produits par la chaîne C_2	0,5
B – 1)	Loi de probabilité de X : On est en présence d'une épreuve aléatoire élémentaire pouvant déboucher sur deux résultats seulement : le stylo choisi au hasard est non conforme, événement de probabilité 0,03 et le stylo choisi au hasard est conforme, événement de probabilité 0,97. On réalise 50 fois cette épreuve aléatoire élémentaire. Les 50 épreuves aléatoires élémentaires sont indépendantes. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre 50 et 0,03.	0,5
B – 2)a)	L'événement « Le lot contient exactement 2 stylos non conformes dans un lot » se traduit par « X = 2 » donc $P(X = 2) = C_{50}^{2}\, 0{,}03^{2}\, 0{,}97^{48} = 0{,}255518\ldots \approx 0{,}256$.	2
B – 2)b)	L'événement « Le lot contient au moins 2 stylos non conformes » se traduit par « $X \geq 2$ » donc $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0{,}4447\ldots \approx 0{,}445$.	
B – 3)a)	La variable aléatoire Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,p = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5$.	1,5
B – 3)b)	L'événement « Le lot contient 47 stylos conformes » est le même que « Le lot contient 3 stylos non conformes » ; il se traduit par $P(Y = 3) = 0{,}126$ selon le formulaire.	
C – 1)a)	L'hypothèse nulle H_0 est « $m = 11$ » et l'hypothèse alternative H_1 est « $m \neq 11$ ».	4
C – 1)b)	Sous l'hypothèse nulle H_0 la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 11 et d'écart-type 0,4 ; la variable aléatoire $\overline{T} = \dfrac{\overline{Z} - 11}{0{,}4}$ suit la loi normale centrée réduite N(0,1). Les équations suivantes sont équivalentes $P(11 - h \leq \overline{Z} \leq 11 + h) = 0{,}9$; $P\left(\dfrac{11 - h - 11}{0{,}4} \leq \dfrac{\overline{Z} - 11}{0{,}4} \leq \dfrac{11 + h - 11}{0{,}4}\right) = 0{,}9$; $P\left(\dfrac{-h}{0{,}4} \leq \overline{T} \leq \dfrac{h}{0{,}4}\right) = 0{,}9$; $2\Pi\left(\dfrac{h}{0{,}4}\right) - 1 = 0{,}9$; $\Pi\left(\dfrac{h}{0{,}4}\right) = 0{,}95$. Par lecture inverse de la table on obtient $\dfrac{h}{0{,}4} = 1{,}645$ donc $h \approx 0{,}658$.	
C – 1)c)	L'intervalle de conformité est $[11 - 0{,}658 \,;\, 11 + 0{,}658]$, c'est à dire [10,342 ; 11,658]. La règle de décision du test est alors : On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 stylos et on calcule la moyenne des masses des stylos de cet échantillon. Si cette moyenne est dans l'intervalle [10,342 ; 11,658], on accepte H_0 au seuil de risque de 10 %. Si cette moyenne n'est pas dans l'intervalle [10,342 ; 11,658], on rejette H_0 et on accepte H_1 au seuil de risque de 10 %.	
C – 2)	Pour l'échantillon observé, la moyenne des masses des stylos est de 10,6 grammes donc on accepte H_0 et on conclut que le stock de stylos du modèle M_3 est conforme quant à la masse, au seuil de risque de 10 %.	1


8
6
4
2
-2
-1
1
2
3
4
C_d
C_h