BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2007

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : MATGRB2***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

On étudie dans cet exercice une fonction φ susceptible d'intervenir dans la modélisation du trafic Internet au terminal informatique d'une grande société. Pour un réel t positif, $\varphi(t)$ est la probabilité que le temps séparant l'arrivée de deux paquets de données soit inférieur à t secondes.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 710y = 710$
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions définies sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' + 710y = 0.$$

2° Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = 1$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction

Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$.

On désigne par C la courbe représentative de φ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où on prend comme unités : 10 cm pour 0,01 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

1° Montrer que la fonction φ est croissante sur $[0, +\infty[$.

2° a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction φ est $\varphi(t) = 710t - \dfrac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de C et T au voisinage de ce point.

3° Tracer sur la copie la tangente T et la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ défini au début de la partie B. On pourra se limiter à la partie de C correspondant à l'intervalle $[0 ; 0,01]$.

4° a) Déterminer par le calcul le nombre réel positif α tel que $\varphi(\alpha) = 0{,}5$.
Donner la valeur exacte de α, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.
b) Retrouver sur la figure le résultat obtenu au a) : faire apparaître les constructions utiles.

Le nombre α représente le temps médian en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

C. *Calcul intégral*

1° Pour tout réel positif t, on note $I(t) = 710 \int_0^t x\,\mathrm{e}^{-710x}\,\mathrm{d}x$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(t) = -t\,\mathrm{e}^{-710t} - \frac{1}{710}\,\mathrm{e}^{-710t} + \frac{1}{710}.$$

2° Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.

Donner la valeur exacte de cette limite, puis sa valeur approchée arrondie à 10^{-5}.

Le résultat obtenu est le temps moyen en secondes séparant l'arrivée de deux paquets de données.

EXERCICE 2 (8 points)

Soit le signal f, périodique de période $T = 2\pi$, impair, tel que :

$$f(t) = 1 \text{ sur l'intervalle }]0, \pi[\text{ et } f(0) = f(\pi) = 0.$$

1° Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On prendra comme unité 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

2° Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$ le développement en série de Fourier associé à f.

a) Justifier que $a_n = 0$ pour tout nombre entier naturel n.

b) On rappelle que, dans le cas d'un signal impair, $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) \, dt$ pour tout nombre entier naturel non nul n.

Justifier que $\omega = 1$ et démontrer que $b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$, pour tout nombre entier naturel non nul n.

3° On décide de ne conserver, dans le développement en série de Fourier donné au 2°, que les termes de rang n inférieur ou égal à 5

a) Montrer que la fonction g ainsi obtenue est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t).$$

b) Compléter après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant dont les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2} :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	π
$g(t)$		1,19	0,89					

c) Compléter le graphique de la question 1° par l'allure de la représentation graphique de g sur $[0, \pi]$ obtenue à l'aide des résultats de la question b) et d'une calculatrice graphique.

Les résultats obtenus permettent d'observer l'approximation d'un signal périodique par le signal obtenu avec les premiers termes de son développement en série de Fourier.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS : groupement B

CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION EN MICROTECHNIQUES

ADDITIF 1
AU FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES POUR CERTAINES SPECIALITES DU GROUPEMENT B

Cet additif ne concerne que les spécialités de BTS du groupement B pour lesquels le programme comporte une étude des séries de Fourier.

SERIES DE FOURIER

f : fonction périodique de période T ;

développement en série de Fourier

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega t}\ ,\quad (k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{Z}).$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)\,\mathrm{d}t\ ;\qquad a_k=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t\ ;\qquad b_k=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t\ (n\in\mathbb{Z})\ ;\qquad c_0=a_0\ ;\qquad \frac{a_k-ib_k}{2}=c_k\ ;\qquad \frac{a_k+ib_k}{2}=c_{-k}\quad (k\in\mathbb{N})$$

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$		
e^t	e^t		
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$	$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = k u'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$
$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \ u \text{ à valeurs strictement positives}$$
$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha \, u^{\alpha - 1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\ ,\ b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) \, v'(t) \, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) \, v(t) \, dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$
$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.