CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

CMMECA

ELEMENTS INDICATIFS DE CORRECTION MECANIQUE

SESSION 2008

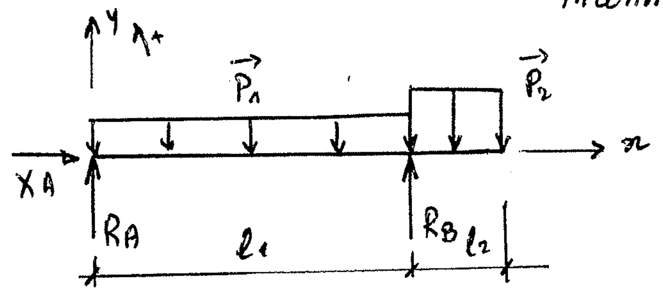
PARTIE 1

1.1) Nature du système

équations : 3
inconnues : 2+1

} ISOSTATIQUE

1.2)



$\Sigma X = 0 \quad X_A = 0$

$\Sigma Y = 0 \quad R_A + R_B - P_1 l_1 - P_2 l_2 = 0$ *

$\Sigma M_A = 0 \quad R_B l_1 - \frac{P_1 l_1^2}{2} - P_2 l_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right) = 0$

$R_B = \frac{P_1 l_1}{2} + \frac{P_2 l_2}{l_1}\left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right) = 0$ d'où $\boxed{R_B = \frac{P_1 l_1}{2} + P_2 l_2 \left(1 + \frac{l_2}{2 l_1}\right)}$

* $\Rightarrow \quad R_A = P_1 l_1 + P_2 l_2 - \left(\frac{P_1 l_1}{2} + P_2 l_2 \left(1 + \frac{l_2}{2 l_1}\right)\right)$

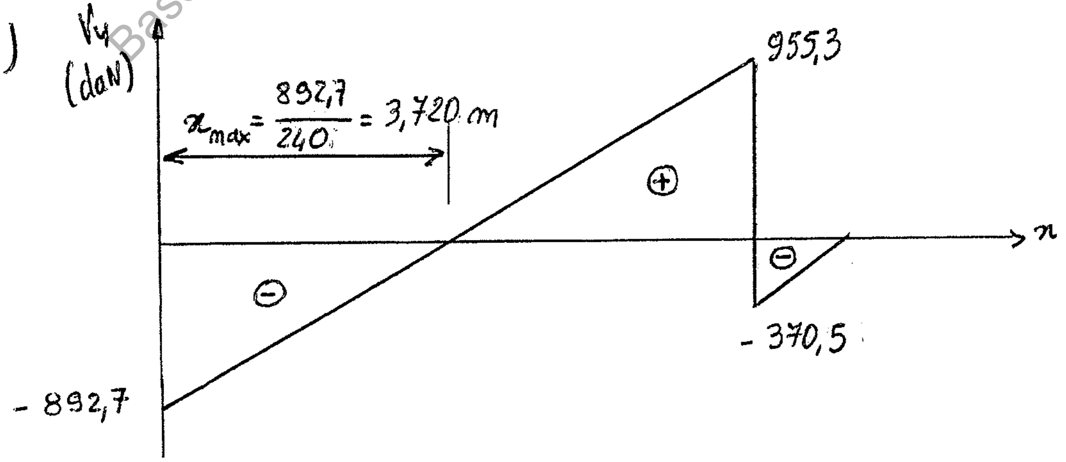
$= \frac{P_1 l_1}{2} + P_2 l_2 - P_2 l_2 - \frac{P_2 l_2^2}{2 l_1}$ d'où $\boxed{R_A = \frac{P_1 l_1}{2} - \frac{P_2 l_2^2}{2 l_1}}$

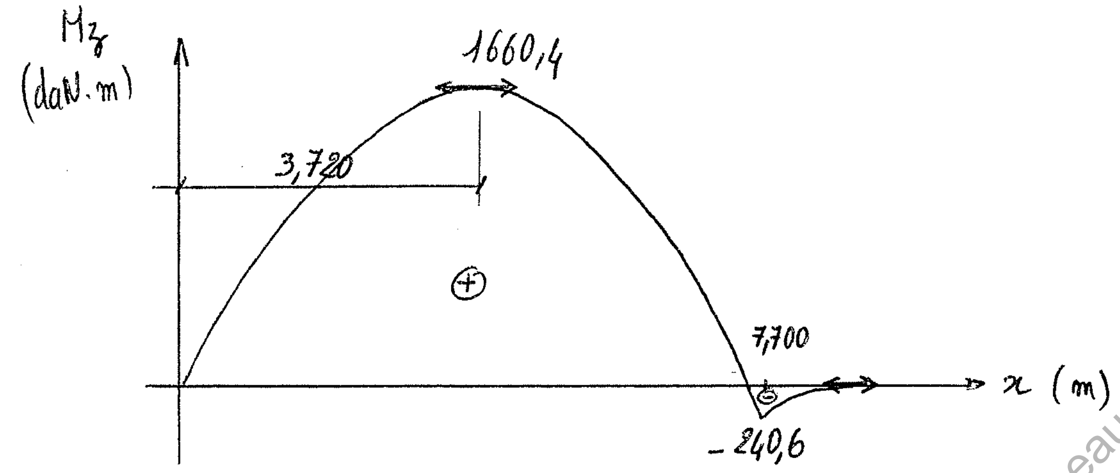
1.3) Application numérique

$R_B = \frac{240 \times 7{,}70}{2} + 285 \times 1{,}30 \left(1 + \frac{1{,}30}{2 \times 7{,}70}\right) \Rightarrow$ $\boxed{R_B = 1325{,}8 \text{ daN}}$

$R_A = \frac{240 \times 7{,}70}{2} - \frac{285 \times 1{,}30^2}{2 \times 7{,}70} \Rightarrow$ $\boxed{R_A = 892{,}7 \text{ daN}}$

1.4)





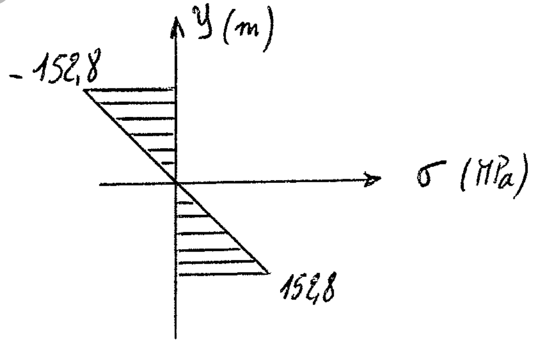
$$M_{max} = -\frac{-892,7 \times 3,720}{2} = 1660,4 \text{ daN.m}$$

$$M_{appui} = 1660,4 - \frac{955,3 \times (7,700 - 3,720)}{2} = -240,6 \text{ daN.m}$$

1.5) $\sigma(x) = -\dfrac{M_z(x)}{W_{el,y}}$ pour $x = 3,720\,m$ $\sigma(3,720) = \pm \dfrac{1660,4}{108,66}$

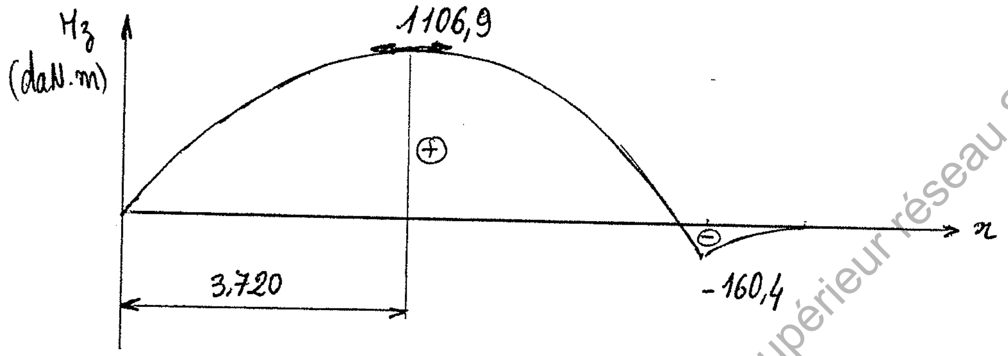
$= \pm 1528$ bars

$= \pm 152,8$ MPa

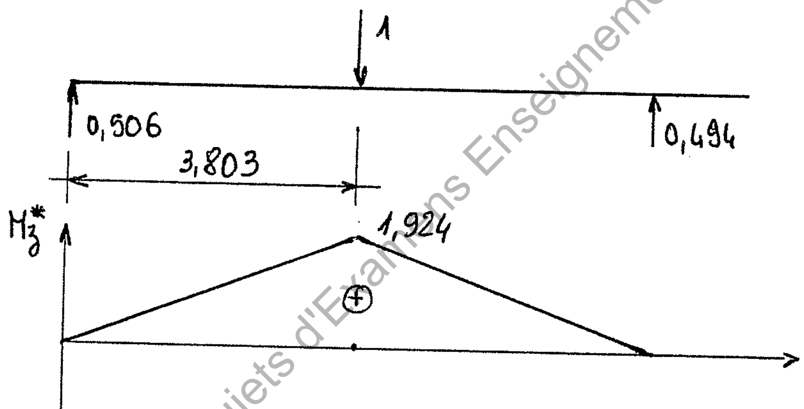


1.7) Méthode de la charge unité

Système S : les charges P_1 et P_2 sont non pondérées dans un rappot de 1,5 par rappot aux charges de la question 1.3)
On a donc le diagramme de M_z dans le même rappot.



Système S*



$$1.\ \Delta = \int_0^\ell \frac{M_z M_z^*}{EI}\,dx = \frac{7,7}{EI} \times \frac{1}{6} \times 1,924 \times \left[-160,4 \times 1,494 + 2 \times 1185,8 \times (1 + 0,494 \times 0,506)\right]$$

avec $\alpha = \dfrac{3,803}{7,70} = 0,494$; $\beta = 0,506$ et $g_0 = \dfrac{160 \times 7,7^2}{8} = 1185,8$ daN.m

$$\Delta = \frac{6727,8}{210000.10^5 \times 869,29.10^{-8}} = 3,687.10^{-2}\ m$$

$\boxed{\Delta = 3,69\ cm}$

On a $\dfrac{\ell}{200} = \dfrac{770}{200} = 3,85$ cm $\Rightarrow$ OK

2.1) • En externe, on a 1 articulation et 2 appuis simples, donc 4 degrés de liberté bloqués pour trois libres ⇒ <u>hyper 1 externe</u>

• En interne, on a 8 barres en plus par rapport au treillis parfaitement triangulé ⇒ <u>hyper 8 interne</u>

⇒ Structure <u>HYPERSTATIQUE DE DEGRE 9</u>

2.2) $I_{Gz} = 2 \times 283{,}6 + 2 \times 39{,}1 \times 350^2 = 9580067 \text{ cm}^4$

2.3) • <u>Analyse des déplacements</u> (repère global)

$$A \left| \begin{array}{l} U_A = 0 \\ V_A = 0 \\ \Omega_A = 0 \end{array} \right. \qquad B \left| \begin{array}{l} U_B = 0 \\ V_B = 0 \\ \Omega_B \end{array} \right. \qquad C \left| \begin{array}{l} U_C = 0 \\ V_C = 0 \\ \Omega_C = 0 \end{array} \right.$$

Ω_B → inconnue

→ incompressibilité barres AB et BC

• <u>Calcul des M_{ij}</u> $(\omega_B = \Omega_B)$

<u>Barre AB</u> : $M_{BA} = -\frac{qL^2}{8} + \frac{3EI}{L}\omega_B$

<u>Barre BC</u> : $M_{BC} = \frac{qL^2}{8} + \frac{3EI}{L}\omega_B$

• <u>Equilibre du noeud B</u>

$$0 = -M_{BA} - M_{BC} = \frac{qL^2}{8} - \frac{3EI}{L}\omega_B - \frac{qL^2}{8} - \frac{3EI}{L}\omega_B = 0$$

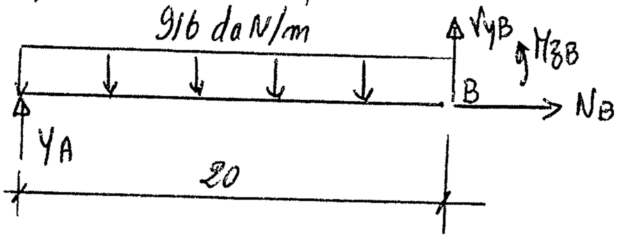
$$\Rightarrow \boxed{\omega_B = 0}$$

On a alors $M_{BA} = -\frac{qL^2}{8}$ et $M_{BC} = \frac{qL^2}{8}$

On en déduit $Mz_B = -M_{BC} = -\frac{qL^2}{8}$

AN: $Mz_B = -\frac{916 \times 20^2}{8} = -45800$ daN.m

2.4) On fait une coupure en B pour déterminer YA.



$$Mz_B + \frac{916 \times 20^2}{2} - Y_A . 20 = 0 \quad \Rightarrow -45800 + \frac{916 \times 20^2}{2} - Y_A . 20 = 0$$

d'où $\boxed{Y_A = 6870 \text{ daN}}$ par symétrie $\boxed{Y_C = 6870 \text{ daN}}$

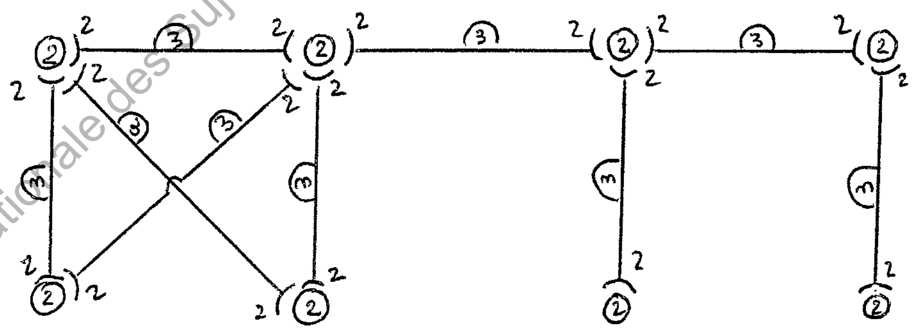
Dans le système global $Y_A + Y_C + Y_B - 40 \times 916 = 0$

$\Rightarrow \boxed{Y_B = 22900 \text{ daN}}$

2.5) $$y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{qL^4}{192EI} = -\frac{916 \times 20^4}{192 \times 210000\ 10^5 \times 9580067.10^{-8}} \Rightarrow \boxed{y\left(\frac{\ell}{2}\right) = -3{,}8 . 10^{-4} m}$$

PARTIE 3

3.1)

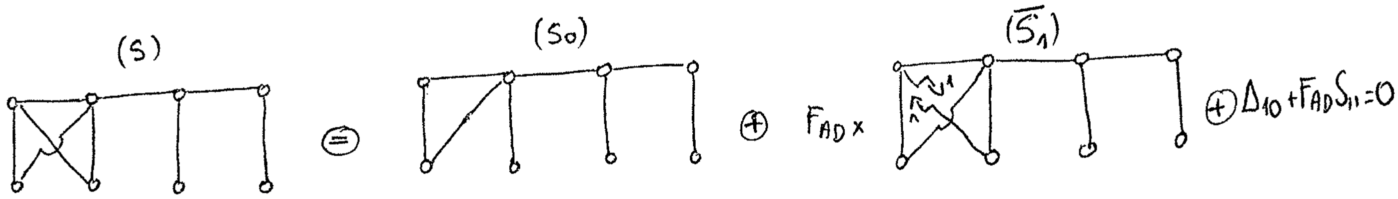


inconnues : barres $18 \times 2 = 36$
liaisons $8 = 8$
$= 44$

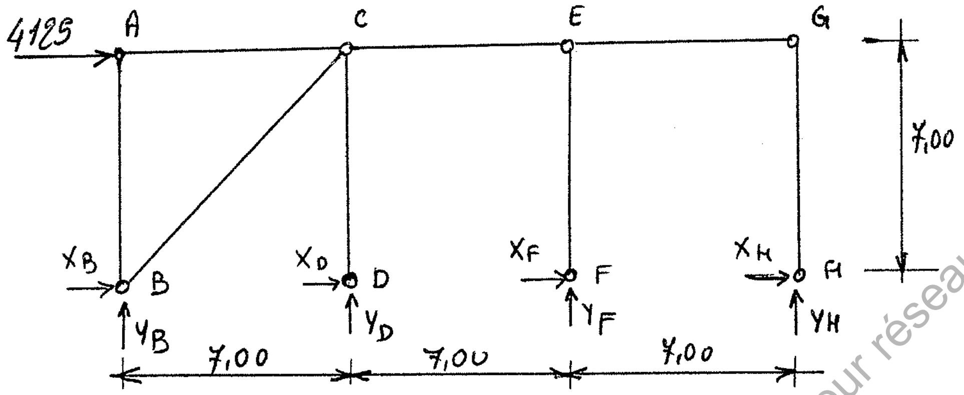
équations : barres $3 \times 9 = 27$
articulation $8 \times 2 = 16$
$= 43$

$44 - 43 = 1$ STRUCTURE HYPER1

3.2)



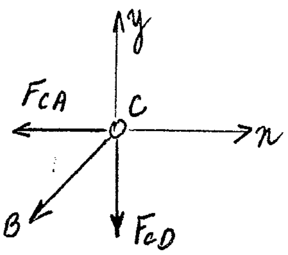
Etude de (S₀)



- barres EF, GH et ID biarticulées non chargées $\Rightarrow X_F = X_D = X_H = 0$
- équilibre du noeud G $\Rightarrow F_{GH} = 0$ et $F_{GE} = 0$
- équilibre du noeud E $\Rightarrow F_{EC} = 0$ et $F_{EF} = 0$
- équilibre du noeud H $\Rightarrow Y_H = 0$
- équilibre du noeud F $\Rightarrow Y_F = 0$
- PFS: $X_B = -4125\,daN$ $Y_B = -4125\,daN$ $Y_A = 4125\,daN$
- équilibre du noeud A : $\boxed{F_{AC} = -4125\ daN}$ compression

$F_{AB} = 0$

équilibre du noeud C :



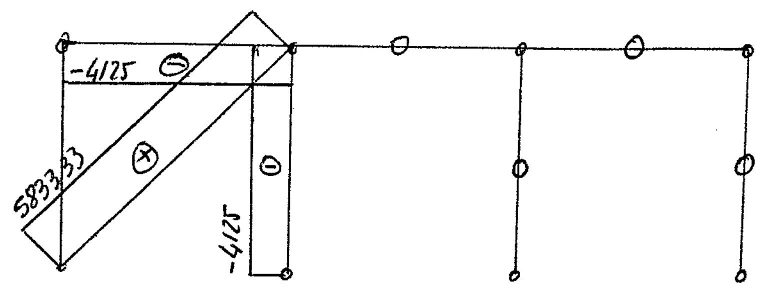
* $-F_{CA} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{CB} = 0$

$F_{CB} = -\sqrt{2} \times (-4125)$

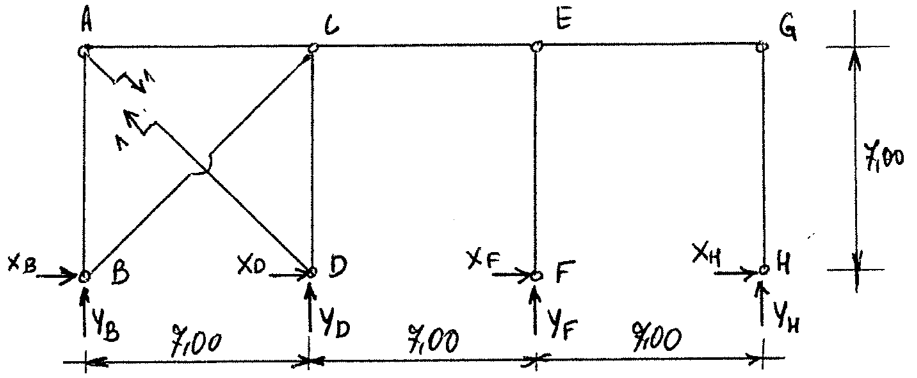
$\boxed{F_{CB} = 5833,33\ daN}$ traction

* $-F_{CD} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{CB} = 0$

$\boxed{F_{CD} = -4125\ daN}$ traction



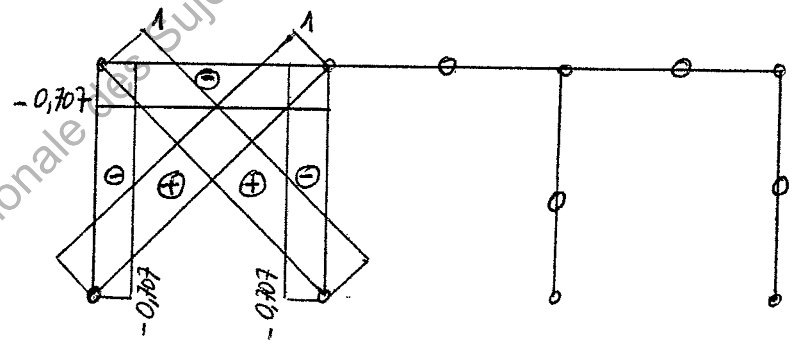
Etude de (S_1)



Comme (S_0) on a $Y_F = 0$; $Y_H = 0$, $X_F = 0$ et $X_H = 0$

$F_{GH} = 0$, $F_{GE} = 0$, $F_{EC} = 0$ et $F_{EF} = 0$

- équilibre du noeud A : $\boxed{F_{AC} = -0{,}707}$ compression $\boxed{F_{AB} = -0{,}707}$ compression
- équilibre du noeud C : $\boxed{F_{CB} = 1}$ traction $\boxed{F_{CD} = -0{,}707}$ compression
- équilibre du noeud D : $Y_D = -F_D - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707 - 0{,}707 = 0$; $X_D = 0{,}707$
- équilibre du noeud B : $X_B = -0{,}707$ et $Y_B = 0$



Calcul des sollicitations dans (S)

$$E.\Delta_{10} = \frac{7 \times (-4125) \times (-0{,}707)}{14{,}2.10^{-4}} + \frac{7\sqrt{2} \times 5833{,}33 \times 1}{4{,}8.10^{-4}} + \frac{7 \times (-4125) \times (-0{,}707)}{45{,}9.10^{-4}} \quad (\text{daN et m})$$

$$E.\Delta_{10} = 1{,}43765.10^{7} + 1{,}203125.10^{8} + 4{,}447631.10^{6}$$

$$E.\Delta_{10} = 1{,}390978.10^{8}$$

$$E\delta_{11} = \frac{7 \times 0{,}5}{14{,}2.10^{-4}} + 2 \times \frac{7\sqrt{2} \times 1}{4{,}8.10^{-4}} + 2 \times \frac{7 \times 0{,}5}{45{,}9.10^{-4}} = 2{,}4647.10^{3} + 4{,}12479.10^{4} + 1{,}5251.10^{3}$$

$$ES_{11} = 4{,}52377.10^4$$

d'où $\quad F_{AD} = -\dfrac{E\Delta_{10}}{ES_{11}} = -\dfrac{1{,}390978.10^8}{4{,}52377.10^4} = -3076\ daN$

On peut alors calculer les autres efforts. $F(s) = F(s_0) + F_{AD} \times F(\bar{s}_1)$

$F_{AB} = 0 - 3076 \times (-0{,}707) = 2174\,daN$ traction

$F_{AC} = -4125 - 3076 \times (-0{,}707) = -1950\ daN$ compression

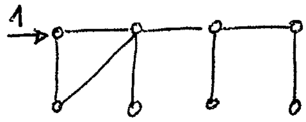
$F_{CB} = 5833{,}33 - 3076 \times 1 = 2757{,}7\ daN$ traction

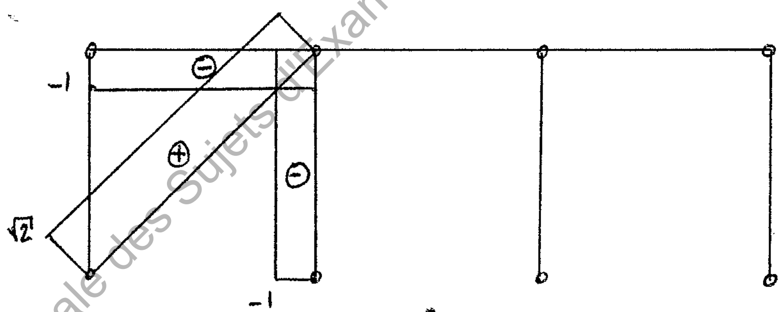
$F_{BD} = -4125 - 3076 \times (-0{,}707) = -1950\ daN$ compression

$F_{HG} = F_{GE} = F_{FE} = F_{CE} = 0$

3.3) En ayant fait la bonne décomposition en 3.2) on a répondu à la question (voir plus haut).

3.4) On applique la méthode de la charge unité le diagramme $N(x)$ se déduit de celui du 3.3)





$$1.u_A = \frac{1}{\underset{\frac{MN}{m^2}}{210000.10^5}} \left(\frac{\overset{m}{7} \times \overset{10^2 N}{(-4125)} \times (-1)}{45{,}9.10^{-4}} + \frac{7 \times (-4125) \times (-1)}{14{,}2.10^{-4}} + \frac{7\sqrt{2} \times (5833{,}33) \times \sqrt{2}}{4{,}8.10^{-4}\ m^2} \right) \frac{daN.m}{m^2}$$

$$u_A = \frac{1}{210000.10^5} \left(6{,}29085.10^6 + 2{,}033451.10^7 + 1{,}701475.10^8 \right)$$

$$u_A = \frac{1{,}967729.10^8}{210000.10^5} \quad 10^{-5} \quad 10^{-4} \quad 10 \quad 10 \qquad \boxed{u_A = 9{,}37.10^{-3}\ m} \qquad 9{,}4\ 10^{-6}$$