BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2008

<u>SUJET</u>

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **coefficient : 2**

<u>Calculatrice autorisée</u>, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- **5 pages numérotées de la page 1/5 à 5/5.**
- **le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.**

E2 : MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Le (la) candidat (e) doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices est autorisé.

Le formulaire officiel de mathématique est joint au sujet.

EXERCICE N° 1 (7 points)

La société d'exploitation forestière JURABOIS exploite des coupes et commercialise le bois auprès de scieries situées en France, en Suisse et en Allemagne.
Grâce à une équipe d'agents commerciaux efficaces, la société gagne tous les ans de nouveaux clients, le nombre de ces nouveaux clients étant à peu près le même chaque année.
Par ailleurs, un certain pourcentage de clients abandonne chaque année la société pour se tourner vers une société concurrente. Ce pourcentage varie peu d'une année à l'autre.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la société JURABOIS au cours des dix dernières années.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Nombre de clients	1000	1030	1056	1080	1100	1118	1134	1149	1160	1171

Partie A

1. Compléter, sur la feuille annexe, le tableau reproduit ci dessous, dans lequel on désigne par :
   - n le rang de l'année à partir de 1998 (ainsi $n = 0$ pour 1998) ;
   - u_n le nombre de clients de la société pour l'année $(1998 + n)$ (ainsi $u_0 = 1000$) ;
   - $x_n = u_n$ et $y_n = u_{n+1}$ (ainsi $x_0 = 1000$ et $y_0 = 1030$).

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
n	0	1							
$x_n = u_n$	1000	1030							
$y_n = u_{n+1}$	1030	1056							

2. En déterminant avec une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés, donner deux réels m et p qui modélisent la relation entre u_{n+1} et u_n sous la forme $u_{n+1} = m u_n + p$.
   (On arrondira m à la cinquième décimale, et p à la deuxième décimale.)

3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y et l'interpréter.

Partie B

On étudie alors la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 0{,}88u_n + 150$, avec $u_0 = 1000$, chaque terme u_n étant une bonne approximation du nombre de clients de la société JURABOIS pour l'année $(1998 + n)$.

1. On pose, pour tout entier n : $v_n = u_n - 1250$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Montrer que : $u_n = 1250 - 250 \times 0{,}88^n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie C

1. En se référant au préambule de l'exercice et en utilisant la formule : $u_{n+1} = 0{,}88u_n + 150$, donner une estimation du nombre de nouveaux clients gagnés chaque année et une estimation du pourcentage de clients perdus d'une année à l'autre.

2. À partir de quelle année peut-on prévoir que le nombre de clients dépassera 1200 ?

EXERCICE N° 2 (4 points)

La société JURABOIS exploite des coupes constituées exclusivement de feuillus et de résineux. Elle désire simplifier le règlement que ses salariés doivent appliquer pour la coupe du bois. Actuellement le règlement dit qu'un arbre est à abattre dans les quatre cas suivants :

- si c'est un résineux au tronc droit mesurant plus de 20 m de hauteur ;
- si c'est un feuillu de 50 ans ou plus ;
- s'il a moins de 50 ans et mesure plus de 20 m de hauteur ;
- s'il est tordu.

Pour un arbre quelconque, on définit les variables booléennes suivantes par :

$a = 1$ si l'arbre est un résineux ;
$b = 1$ si l'arbre a moins de 50 ans ;
$c = 1$ si l'arbre mesure plus de 20 m de hauteur ;
$d = 1$ si l'arbre est tordu.

1. Ecrire la fonction booléenne $f(a,b,c,d)$, qui traduit le règlement actuel d'abattage d'un arbre.

Grâce à une bonne gestion des forêts que la société exploite, il n'y a maintenant plus d'arbres tordus.

2. Montrer que le nouveau règlement d'abattage se traduit par la fonction :
$$g(a,b,c) = ac + \overline{a}\overline{b} + bc .$$
3. Donner le tableau de Karnaugh de cette fonction.
4. Simplifier au maximum cette fonction à l'aide du tableau de Karnaugh.
5. Ecrire la nouvelle règle d'abattage d'un arbre sous la forme la plus simple possible.

EXERCICE N° 3 (9 points) Les deux parties sont indépendantes

Partie A

Les probabilités demandées seront arrondies à la quatrième décimale.

1. Les sapins vendus par la société JURABOIS peuvent présenter deux défauts invisibles avant l'abattage, l'un dû à une attaque par un insecte, l'autre dû à la présence d'un champignon. Les deux défauts sont indépendants l'un de l'autre. Pour un sapin choisi au hasard, on note :
   - I l'événement : « le sapin présente le défaut dû à l'insecte » ;
   - C l'événement : « le sapin présente le défaut dû au champignon » ;
   - D l'événement : « le sapin présente au moins un défaut ».

   Une étude a montré que la probabilité des événements I et C sont respectivement : $P(I) = 0,0358$ et $P(C) = 0,0249$.

   a) Calculer $P(I \cap C)$.

   b) En déduire $P(D)$.

On admet que la probabilité p qu'un tronc de sapin présente au moins un défaut est égale à : $p = 0{,}06$ et que les différents troncs peuvent présenter ou non au moins un défaut de façon indépendante.
Les clients de la société achètent les troncs de sapins par lots de n troncs. On note Y la variable aléatoire qui, à tout lot de n troncs, associe le nombre de troncs présentant au moins un défaut.

2. Pour la « Scierie bisontine », on a : $n = 50$.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ? Justifier la réponse.
   b) Calculer $P(Y = 6)$.
   c) On admet que l'on peut approcher la loi de Y par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi ?
   d) M. Landry, directeur de la Scierie bisontine affirme qu'il a plus de 90 % de chances d'avoir au maximum 5 troncs défectueux dans un lot donné. A-t-il raison ? Pourquoi ?

3. Le « Groupement des Scieries Vaudoises » achète ses troncs de sapins par lot de 450 sapins.
   On décide d'approcher la variable Y par une variable Z qui suit la loi normale d'espérance 27 et d'écart-type 5.
   a) Justifier le choix de ces paramètres.
   b) Utiliser cette approximation pour calculer $P(Y \leq 24)$, c'est-à-dire calculer : $P(Z \leq 24{,}5)$.
   c) De même, donner une approximation de $P(25 \leq Y \leq 31)$, en calculant $P(24{,}5 \leq Z \leq 31{,}5)$.

Partie B

Le PDG de JURABOIS entreprend une étude sur le prix du mètre cube de sapin au cours du temps.
Il établit que, si t est le temps écoulé, en mois, depuis le 1er janvier 2005, $p(t)$ s'exprime, en euros, par : $p(t) = 41 + 0{,}2t + 1{,}6\ \mathrm{e}^{-0{,}125\,t+2{,}5}$.
La courbe représentative de la fonction p est donnée dans la feuille annexe.

1. Compléter sur la feuille annexe, le tableau reproduit ci-dessous en arrondissant à la deuxième décimale.

dates	01.01.2005	01.07.2005	01.01.2006	01.07.2006	01.01.2007		01.01.2009	01.01.2011
t	0	6	12	18	24	36		
$p(t)$	60,49		47,75					

2. Calculer la dérivée $p'(t)$, vérifier que $p'(t)$ est du signe de $1 - \mathrm{e}^{-0{,}125t+2{,}5}$, puis dresser le tableau des variations de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;\,72]$.

3. Déterminer par lecture graphique la date (année-mois) à partir de laquelle le prix du mètre cube de sapin dépassera à nouveau 50 €. (On fera apparaître les traits de constructions sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.)

4. Déterminer une primitive de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;\,72]$.
   En déduire une valeur, arrondie au centime d'euro près, du prix moyen du mètre cube de sapin pendant les années 2005-2007, en calculant l'intégrale :

$$I = \frac{1}{36} \int_0^{36} p(t)\ \mathrm{d}t.$$

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie

EXERCICE N°1 **Partie A** 1.

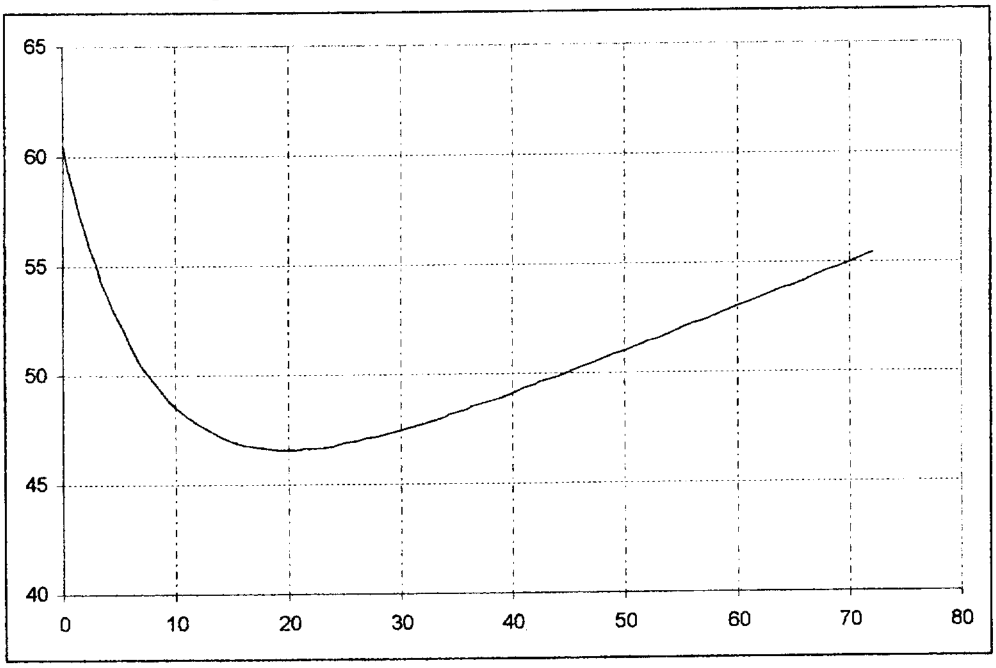
Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
n	0	1							
$x_n = u_n$	1000	1030							
$y_n = u_{n+1}$	1030	1056							

EXERCICE N°3 **Partie B 1.**

Dates	01.01.2005	01.07.2005	01.01.2006	01.07.2006	01.01.2007		01.01.2009	01.01.2011
t	0	6	12	18	24	36		
$p(t)$	60,49		47,75					

Partie B 3.

La courbe suivante est la représentation graphique de la fonction $t \mapsto p(t)$ sur l'intervalle [0 ; 72].



FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}\,t=\left[u(t)v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}\,t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)\,!}+t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\,\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x'+b(t)\,x=0$	$f(t)=ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t\mapsto\dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES :*

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

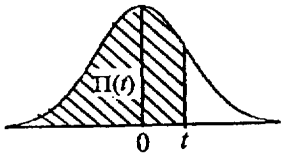
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$