BACCALAURÉAT PROFESSIONNEL

TECHNICIEN DU FROID ET DU CONDITIONNEMENT DE L'AIR

Épreuve scientifique et technique E1

Sous-épreuve E12 - Unité U 12

MATHÉMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES

Le sujet comporte deux parties :

- **partie mathématiques :**

- exercice 1 : fonctions numériques	**11 points**
- exercice 2 : activités statistiques	**4 points**

- **partie sciences :**

- exercice 3 : mécanique (fluides en mouvement)	**2 points**
- exercice 4 : mécanique (fluides en mouvement)	**3 points**

Les annexes 1 et 2 sont à rendre avec la copie d'examen

Un formulaire de mathématiques est joint au sujet page 2/10 et des rappels de relations non exigibles peuvent être donnés dans certains exercices de mathématiques et/ou de sciences physiques.

L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve. En particulier toutes les calculatrices de poche (format maximal 21 x 15 cm), y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

L'échange de calculatrices entre les candidats pendant les épreuves est interdit.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT PROFESSIONNEL
Secteur industriel : T.F.C.A.

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln(a^n) = n \ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2+bx+c = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r

Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)\,r$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = \frac{k\,(u_1+u_k)}{2}$$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n = u_1\,q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k = u_1\,\frac{1-q^k}{1-q}$$

Trigonométrie

$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \sin b\,\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\qquad\;\;\, = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\,\cos a$

Statistiques

Effectif total $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$

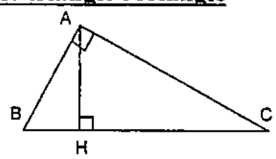
Moyenne $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$

Variance $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\,x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

Écart type $\sigma = \sqrt{V}$

Relations métriques dans le triangle rectangle

$AB^2 + AC^2 = BC^2$



$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} \qquad \cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} \qquad \tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$

Résolution de triangle

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

R : rayon du cercle circonscrit

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}\,bc\,\sin\widehat{A}$

Trapèze : $\frac{1}{2}\,(B+b)\,h$

Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

- Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : volume $= Bh$
- Sphère de rayon R :

  aire $= 4\pi R^2$ $\qquad$ volume $= \frac{4}{3}\pi R^3$

- Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : volume $= \frac{1}{3}\,Bh$

Calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace

$\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy'$	$\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy' + zz'$
$\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{x^2+y^2}$	$\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$:

$\vec{v}.\vec{v}' = \lVert\vec{v}\rVert \times \lVert\vec{v}'\rVert\ \cos(\vec{v},\vec{v}')$

$\vec{v}.\vec{v}' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}'$

PARTIE MATHÉMATIQUES (15 points)

Les courbes caractéristiques d'une pompe et du réseau hydraulique correspondant, représentent la hauteur d'eau ***Hm***, en mètre, en fonction du débit ***Q***, en mètre cube par heure. La hauteur d'eau ***Hm*** correspond à une différence de pression Δp, égale aux pertes de charges dans le réseau.

L'objectif de cette étude est de vérifier si une pompe est adaptée à un réseau hydraulique.

Afin de vérifier si la pompe est convenablement adaptée au réseau, on recherche graphiquement et par calcul les coordonnées du point d'intersection entre ces deux courbes. Ce point est appelé « point de fonctionnement ».

EXERCICE 1 : fonctions numériques — 11 points

Partie A : calculs numériques

La courbe caractéristique de la pompe est tracée dans le repère de **l'annexe 1, page 9, à rendre avec la copie.**

Déterminer graphiquement les valeurs approchées au dixième de la hauteur d'eau ***Hm*** pour deux débits :

- $Q_1 = 4$ m^3/h.
- $Q_2 = 6$ m^3/h.

Laisser les traits de construction apparents.

Partie B : étude de deux fonctions numériques

I - Modèle de la courbe caractéristique de la pompe.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $f(x) = -0,024\,x^2 + 3,381$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est tracée dans le repère de **l'annexe 1**.

1) A partir du tableau de variation de la fonction f, donné en **annexe 1**, déterminer :

   a) la valeur de x pour laquelle le maximum de f est atteint.

   b) la valeur de ce maximum atteint par la fonction f.

2) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Calculer $f'(x)$.

   b) Calculer la valeur, arrondie au centième, du nombre dérivé $f'(4)$.

   c) En déduire le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

   d) Tracer la tangente (T) sur **l'annexe 1**.

II - Modèle de la courbe caractéristique du réseau

Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $g(x) = 0{,}03\,x^2 + 0{,}2\,x$.

1) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g.

   a) Calculer $g'(x)$.

   b) Etudier le signe de $g'(x)$.

   c) Compléter le tableau de variation de la fonction g en **annexe 2, page 10, à rendre avec la copie**.

2) a) Compléter le tableau de valeurs de la fonction g en **annexe 2**. Arrondir les résultats au dixième.

   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g sur le repère de l'**annexe 1.**

III - Point d'intersection des deux courbes

Soit I le point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Pour déterminer les coordonnées de I, deux méthodes sont utilisées :

1) **Par lecture graphique**

   a) Placer le point d'intersection I.

   b) Déterminer les valeurs arrondies au dixième, des coordonnées de I.

2) **Par calcul**

   a) Montrer que résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à résoudre, dans l'intervalle d'étude [0 ; 10], l'équation : $0{,}054\,x^2 + 0{,}2\,x - 3{,}381 = 0$.

   b) Résoudre l'équation : $0{,}054\,x^2 + 0{,}2\,x - 3{,}381 = 0$.

   c) En déduire la solution x_1 appartenant à l'intervalle [0 ; 10]. Arrondir le résultat au centième.

   d) Calculer la valeur de $f(x_1)$. Arrondir le résultat au centième.

   e) Soit le point J de coordonnées $(x_1 ; f(x_1))$.
   Que peut-on dire des points I et J ?

Partie C : caractéristiques de l'installation hydraulique

Par rapport aux notations du début de l'exercice, on prend : $Q = x$; pour la pompe : $Hm = f(x)$ et pour le réseau $Hm = g(x)$.

Le point de fonctionnement du système correspond au point pour lequel la hauteur d'eau ***Hm*** de la pompe et celle du réseau sont égales.

I - Détermination du point de fonctionnement

Utiliser les résultats de la partie B pour déterminer, au point de fonctionnement, les valeurs de :

   a) La hauteur ***Hm***, idéale au bon fonctionnement de l'installation.

   b) Du débit nominal de la pompe ***Q*** en m^3/h.

II - Calcul de la pression de refoulement.

La hauteur manométrique idéale correspondant au point de fonctionnement du circuit est de $\boldsymbol{Hm} = 2{,}44$ m.

La hauteur d'eau $\boldsymbol{Hm}$ est liée aux pressions de refoulement et d'aspiration par la formule :

$$\boldsymbol{Hm} = \frac{\boldsymbol{P}_{\text{refoulement}} - \boldsymbol{P}_{\text{aspiration}}}{\rho \ g}$$ où

- $\boldsymbol{P}_{\text{refoulement}}$ pression de refoulement en Pa
- $\boldsymbol{P}_{\text{aspiration}}$ pression d'aspiration: $\boldsymbol{P}_{\text{aspiration}} = 100\,000$ Pa
- ρ masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} = 1\,000$ kg/m^3
- g constante de gravitation : g = 10 N/kg

a) Montrer que l'on peut écrire : $\boldsymbol{P}_{\text{refoulement}} = \boldsymbol{Hm} \ \rho \ g + \boldsymbol{P}_{\text{aspiration}}$.

b) Calculer la pression de refoulement sachant que la pression d'aspiration est de 100 000 Pa.

EXERCICE 2 : activités statistiques **4 points**

Un responsable de service après-vente a effectué une enquête sur la durée des dépannages concernant les interventions sur les moteurs de la pompe.

Les résultats suivants, concernant une marque donnée ont été relevés dans le tableau ci-dessous :

Durée des dépannages (minute)	*Nombre d'interventions n_i*
[0 ; 10[	4
[10 ; 20[	8
[20 ; 30[	12
[30 ; 40[	20
[40 ; 50[	24
[50 ; 60[	20
[60 ; 70[	12
Total	**100**

1) Construire l'histogramme des durées de dépannage dans le plan rapporté à un repère, où l'unité d'aire choisie correspond à un effectif de 2 en **annexe 2, page 10, à rendre avec la copie.**

On fait l'hypothèse suivante : les valeurs sont uniformément réparties dans chaque classe.

Seul le résultat est exigé, et les calculs intermédiaires ne sont pas demandés.

2) Calculer la durée moyenne $\overline{x}$ d'une intervention.

3) a) Calculer l'écart-type σ.

b) Si l'écart-type σ est supérieur à 14, il faut revoir les protocoles d'intervention.

Doit-on revoir le protocole d'intervention ?

PARTIE SCIENCES (5 points)

Pour chaque exercice, les valeurs numériques et les formules pouvant être utilisées sont données à la fin de l'énoncé.

Une pompe fonctionne suivant deux modes, en fonction de la position d'un commutateur. Cela induit des vitesses, et des pressions de refoulement différentes.

Les courbes **(courbe n° 1 et courbe n° 2)** caractérisent cette pompe, et sont données par le constructeur sous forme d'abaques.

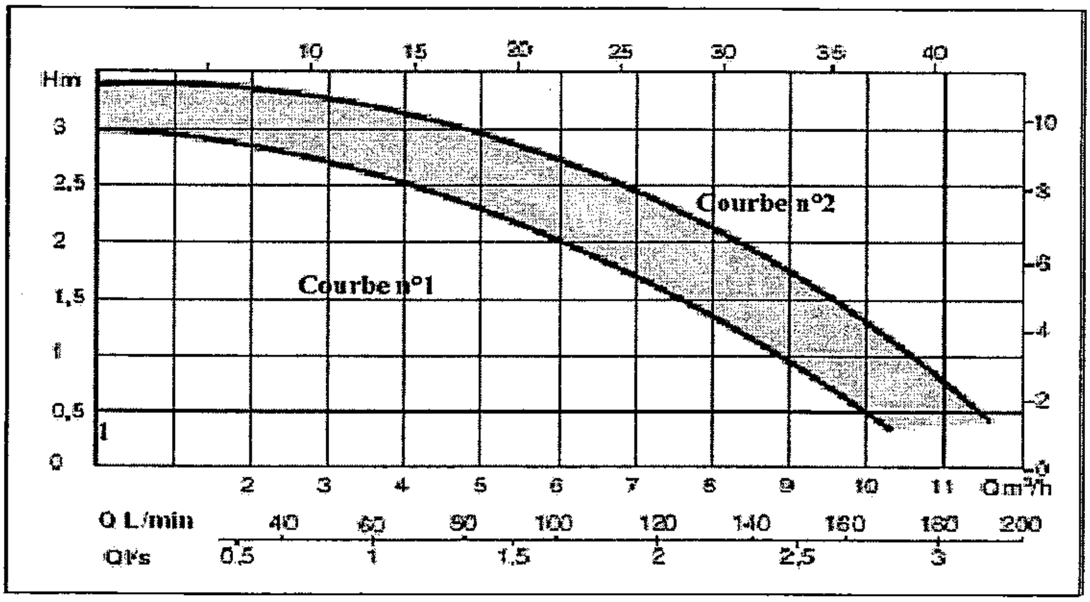


figure 1 : abaque

<u>EXERCICE 3</u> : mécanique (fluides en mouvement) **2 points**

1) Déterminer en utilisant l'abaque ci-dessus **(figure 1)**, les débits approchés à l'unité correspondant à une hauteur ***Hm*** de 2,5 m.

   a) Q_1 en m^3/h pour la courbe n° 1.

   b) Q_2 en m^3/h pour la courbe n° 2

2) Convertir le résultat précédent Q_1 en arrondissant au dixième :

   a) en L/min.

   b) en L/s.

EXERCICE 4 : mécanique (fluides en mouvement) **3 points**

De l'eau circule dans une canalisation présentant un rétrécissement, voir le schéma 3. Le diamètre de la canalisation est D_1 = 10 cm. Le diamètre du rétrécissement est D_2 = 5 cm. La vitesse $\mathbf{v_1}$ de l'eau dans la canalisation est de 0,21 m/s.

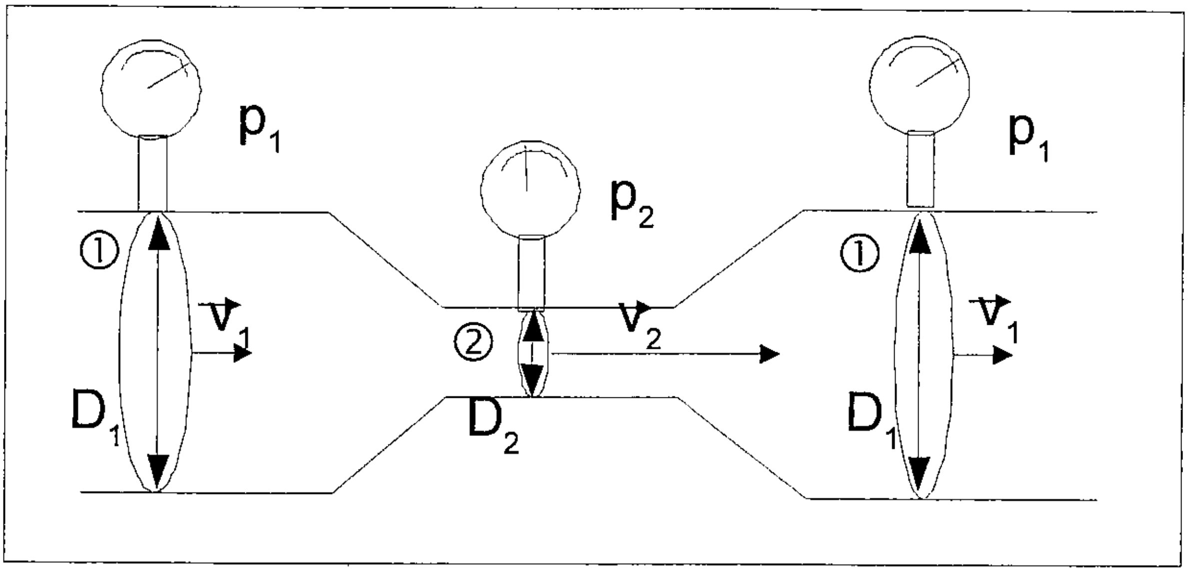


figure 2 : schématisation de la canalisation

1) Compléter le tableau en **annexe 2 à rendre avec la copie.**

2) Calculer, en utilisant la conservation du débit, la valeur de la vitesse $\mathbf{v_2}$ du fluide en arrondissant au centième au niveau du rétrécissement.

3) La pression p_1 est de 125 000 Pa. La vitesse $\mathbf{v_2}$ est de 0,84 m/s. En utilisant la relation de Bernoulli simplifiée, calculer la pression p_2 arrondie à l'unité, au niveau du rétrécissement.

Valeurs numériques	**Formules**	**Unités**
$\rho_{eau} = 1\,000$ kg/m^3	Relation de Bernoulli simplifiée : $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$	ρ : masse volumique en kg/m^3 v : vitesse du fluide en m/s

ANNEXE 1 *à rendre avec la copie*

Partie mathématiques

EXERCICE 1

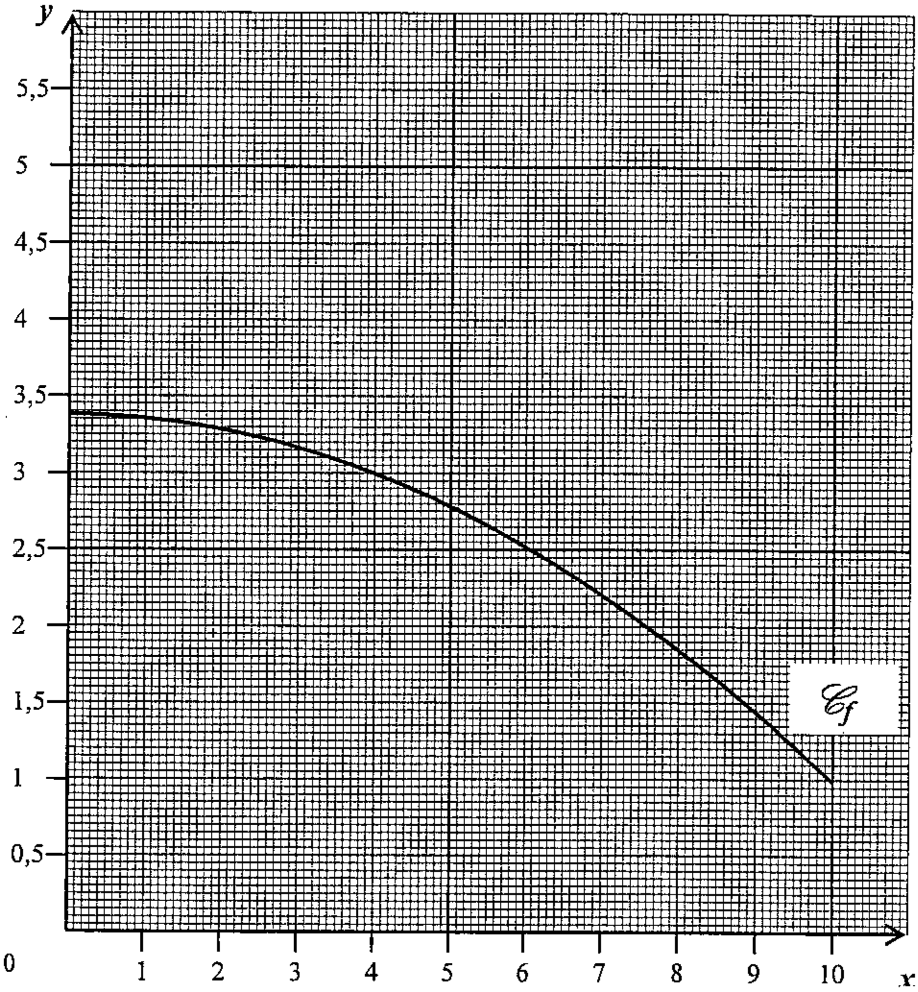


Tableau de variation de la fonction *f*

valeurs de x	0	10
signe de $f'(x)$	—	
variations de f	3,381 ↘	0,981

ANNEXE 2 *à rendre avec la copie*

EXERCICE 1 :

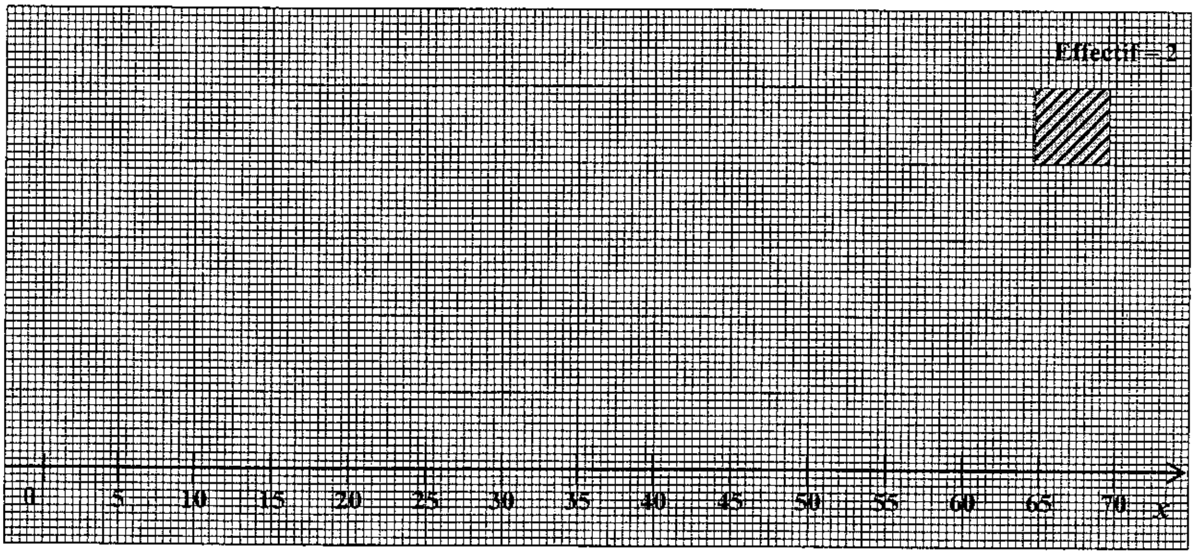
Tableau de variation de la fonction *g*

valeurs de x	0 10
signe de $g'(x)$	
variations de g	

Tableau de valeurs de *g*

x	0	2	4	6	8	10
$g(x)$	0					5

EXERCICE 2 **Histogramme**



Partie sciences

EXERCICE 3

Cochez la bonne réponse pour chaque affirmation		
Un rétrécissement	❑ provoque une augmentation du ❑ ne change rien au ❑ provoque une diminution du	débit du fluide.
Un rétrécissement	❑ provoque une augmentation de ❑ ne change rien à ❑ provoque une diminution de	la vitesse du fluide.
Cet effet s'appelle l'	❑ effet « Venturi » ❑ effet « Doppler » ❑ effet « Papillon »	