BT AGENCEMENT

MATHÉMATIQUES

SESSION 2008

Durée : 3 heures
Coefficient : 4

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante conformément à la circulaire N°99-186 du 16/11/1999

Document à rendre avec la copie :
Papier millimétré

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1/4 à 4/4 et ***un formulaire de mathématiques***.

Exercice 1 *(6 points)*

Pour chaque question, une seule des trois affirmations proposées est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. L'absence de réponse ou une réponse erronée ne sont pas pénalisées. Le candidat recopiera sur sa copie le tableau ci-dessous et le complétera en y reportant la lettre correspondant à l'affirmation qu'il estime exacte. Aucune justification n'est demandée dans cette partie

Questions	1	2	3	4	5	6
Réponse (A, B ou C)						

	Questions	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**
1	$P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ peut se factoriser sous la forme	$(2x-1)(x-1)^2$	$(2x-1)(x^2-1)$	$(2x-1)(x^2+1)$
2	L'équation $\ln(3x^2 - 2x) = 0$ admet pour solution(s)	0 et $\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$ et 1	0 et 1
3	Pour tout $x > 0$, $\ln(2x)$ est égal à	$\ln 2 + \ln x$	$2\ln x$	$(\ln x)^2$
4	L'équation $e^{2x+1} = \frac{1}{e^x}$ admet pour solution	-1	0	$-\frac{1}{3}$
5	La fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x+1)$ a pour dérivée la fonction f' définie par	$f'(x) = \frac{1}{2x+1}$	$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$	$f'(x) = \frac{1}{x+1}$
6	La courbe représentative de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x + \ln x}{x}$ admet pour asymptote oblique en $+\infty$ la droite d'équation	$y = x^2 - 2x$	$y = x$	$y = x - 2$

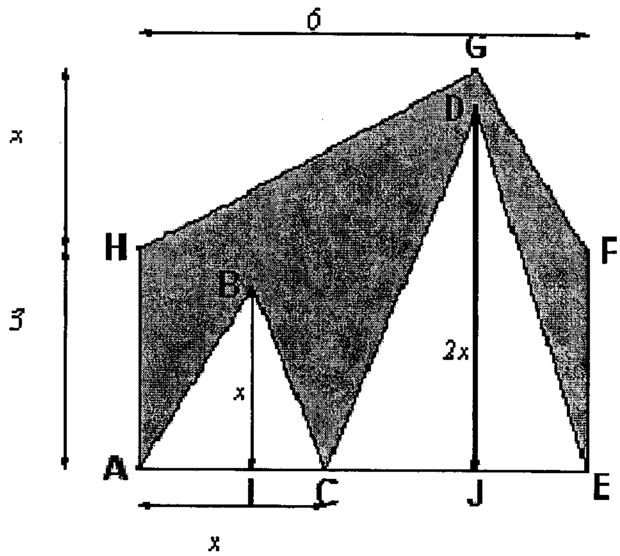
Exercice 2 *(4 points)*

Une fabrique de chalets a pour logo la figure ci-dessous (longueurs en cm) dans laquelle le quadrilatère $AEFH$ est un rectangle tel que $AH = 3$ et $AE = 6$.

Soit C un point du segment $[AE]$. On pose $x = AC$.

On suppose que :

- les triangles FGH et ABC ont pour hauteur x ;
- le triangle CDE a pour hauteur $2x$;
- que les droites (BI) et (DJ) sont perpendiculaires à la droite (AE).



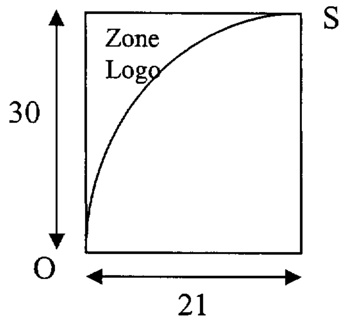
On veut que l'aire de la partie non grisée corresponde au tiers de l'aire totale.

1. Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de x, où $0 \leq x \leq 6$.
2. Déterminer, en fonction de x, la longueur CE, puis en déduire, toujours en fonction de x, l'aire du triangle CDE, puis celle de la partie non grisée.
3. Calculer l'aire totale de la figure *AEFGH*.
4. Montrer que pour respecter la condition annoncée au début de l'énoncé, x doit vérifier l'équation $0,5x^2 - 5x + 6 = 0$.
5. Résoudre cette équation et déterminer x arrondi au mm.

Tournez la page S.V.P.

Problème *(10 points)*

Les feuilles à en-tête d'une entreprise sont au format A_4 (que l'on arrondira à 21×30 cm).



Elles doivent contenir, en haut et à gauche, un logo situé dans la zone délimitée par un arc, en tenant la page dans le sens « vertical », selon le modèle ci-contre.

Cette zone délimitée par l'arc $\overset{\frown}{OS}$ doit représenter au plus le sixième de la page.

Partie A : *Etude d'une fonction* f

On suppose que l'arc $\overset{\frown}{OS}$ est une partie de la représentation graphique C_f de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 30 - 30\mathrm{e}^{-0,2x}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On choisira de réduire la figure à une échelle 1/2 en prenant comme unité graphique 0,5 cm.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote horizontale (D) dont on donnera une équation.
2. Soit f' la fonction dérivée de f.
   a. Déterminer $f'(x)$. Démontrer que $f'(x) = 6\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Calculer $f(0)$, $f'(0)$. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 0.
4. Construire les droites (D), (T) et la courbe C_f.

Partie B : *Calcul d'aire*

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = 30x + 150\,\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
2. Calculer l'aire de la partie de plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 21$. Le résultat sera donné en unité d'aire puis arrondi au mm^2.
3. La condition de départ concernant le maximum que doit représenter l'aire de la zone du logo par rapport à l'aire totale de la feuille est-elle respectée ?

BREVET DE TECHNICIEN
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ce formulaire concerne les brevets de technicien préparés en deux ans après la seconde de détermination.

I. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = b\,u_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

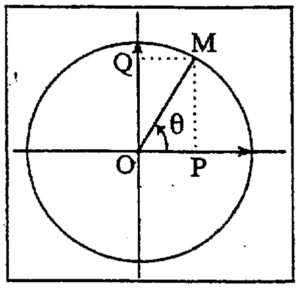
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

D. *TRIGONOMÉTRIE*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

II. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$n x^{n-1}$	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha - 1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(kf)' = kf'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f *sur* $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équation	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = k e^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos \omega x + B \sin \omega x$