BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2008

Epreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : MATGRB2*

Durée : 2 heures

SPECIALITE	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\,\mathrm{e}^{x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur R, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions définies sur R de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 2y = 0.$$

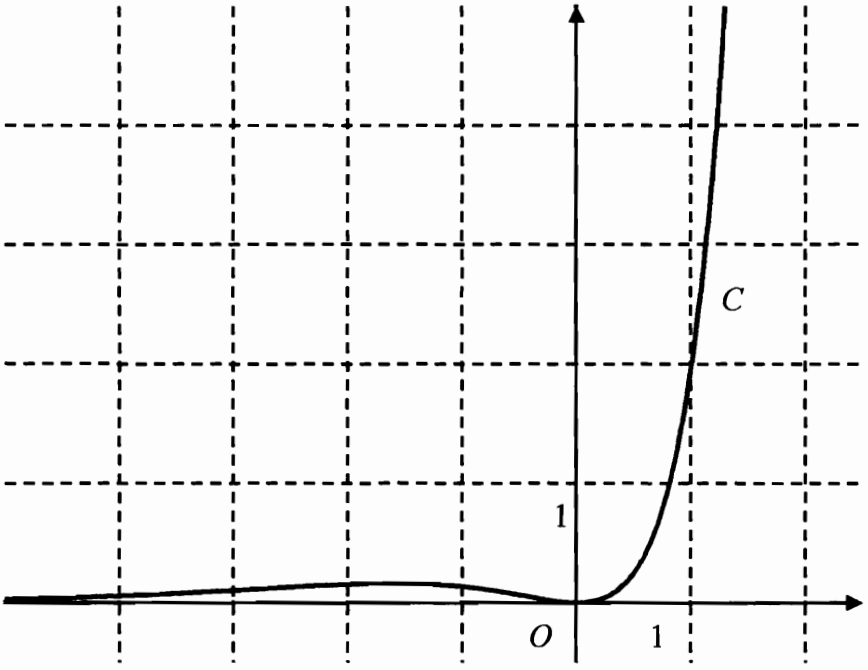
2° Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x + 1)\,\mathrm{e}^{x}$. Sa courbe représentative C est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1° a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = e^x(2e^x - 2 - x)$.

b) En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

b) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,dx$.

Démontrer que $I = 0{,}009$.

2° On note $J = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x}\,dx$.

Démontrer que $J = 0{,}5\,(e^{0,6} - e^{-0,6})$.

3° On note $K = \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\,e^x\,dx$.

Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0{,}3\,(e^{0,3} + e^{-0,3})$.

4° On note $L = \int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,dx$.

a) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.

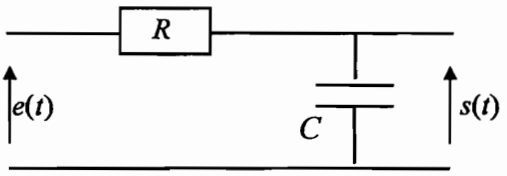
b) Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

c) Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente diffèrent de $4{,}5 \times 10^{-4}$.

EXERCICE 2 (8 points)

La question 5° de cet exercice peut-être traitée de façon indépendante.

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$ et on note $s(t)$ la tension aux bornes du condensateur.



L'équation différentielle régissant ce circuit est (1) : $RC\,s'(t) + s(t) = e(t)$

avec $s(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et où s' est la dérivée de la fonction s.

En utilisant la transformation de Laplace, on se propose de rechercher la tension $s(t)$ aux bornes du condensateur dans le cas suivant :

- $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-0{,}1)$, où la fonction $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$;
- $R = 10\ \Omega$ et $C = 0{,}004$ F.

Pour cela on admet que les fonctions s, s' et e admettent des transformées de Laplace.

On note $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$ et $S(p) = \mathcal{L}[s(t)]$.

1° Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle [0 ; 0,2]. On prendra comme unité 1 cm pour 0,02 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

2° Déterminer $E(p) = \mathcal{L}[e(t)]$.

3° a) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), déterminer une expression de $S(p)$ en supposant que $s(0^+) = 0$.

b) Montrer que $S(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+25} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right)e^{-0{,}1\,p}.$$

4° a) Déterminer $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right]$.

b) En déduire $\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right)e^{-0{,}1\,p}\right]$.

c) En déduire la tension $s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)]$.

5° On admet que si $t \in [0;0{,}1[$, $s(t) = 1 - e^{-25t}$ et si $t \in [0{,}1;+\infty[$, $s(t) = e^{-25t}(e^{2{,}5} - 1)$.

a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près).

t	0	0,025	0,05	0,075	0,100	0,125	0,15	0,175	0,2
$s(t)$									

b) Construire une représentation de s sur le même graphique que celle de e.

Formulaire

$$\begin{tikzcd} f(t)\,\mathcal{U}(t) \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & F(p) \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g].$$

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p+a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathcal{L}[f(t)\,\mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)\,\mathcal{U}(t-\tau)] = F(p)\,e^{-\tau p};$$

$$\mathcal{L}[f(t)\,e^{-at}\,\mathcal{U}(t)] = F(p+a);$$

$$\mathcal{L}[f'(t)\,\mathcal{U}(t)] = p\,F(p) - f(0^+).$$

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS : groupement B

CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION EN MICROTECHNIQUES

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$, $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$, $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
e^t	e^t	$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}

Opérations

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(k\,u)' = k\,u'$$

$$(uv)' = u'v + u\,v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u\,u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},\ u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha\,u^{\alpha-1}\,u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ ..... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ..... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.