

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR**Épreuve de Mathématiques****GROUPEMENT C***Durée : 2 heures*

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	1
Charpente-couverture	1,5
Communication et industrie graphique	2
Étude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux	2
Industries céramiques	2
Industries céréalières	2
Industries des matériaux souples (2 options)	1
Industries papetières	2
Mise en forme des alliages moulés	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique bois et ameublement	1,5
Productique textile (4 options)	3
Réalisation d'ouvrages chaudronnés	2
Systèmes constructifs bois et habitat	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Plus le formulaire de mathématiques page 1 à 5

Document à rendre avec la copie :

Annexe page 3/3

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

CALCULATRICE AUTORISÉE

Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.

Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.

Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.

Exercice 1 (9 points)**Partie A**

L'étude d'un mouvement a montré que la vitesse exprimée en mètres par seconde est une fonction dérivable y de la variable réelle positive t vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y = 50.$$

1. Résoudre sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
2. Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. En déduire la solution générale de (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
4. Sachant que la vitesse initiale à l'instant $t = 0$ est nulle, déterminer la vitesse y en fonction de t .

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 25(1 - e^{-2t}).$$

On donne sur la feuille *annexe*, à remettre avec la copie, la représentation graphique Γ de la fonction f dans un repère orthogonal.

La fonction f représente la fonction vitesse déterminée dans la partie A.

Le but de l'exercice est de justifier et de compléter la représentation graphique de la fonction f donnée en *annexe*.

1. a) Par lecture graphique déterminer une valeur arrondie au dixième de l'instant t_0 où la vitesse dépasse 20 m.s^{-1} .
b) Résoudre l'inéquation $f(t) > 20$. En déduire la valeur exacte de t_0 .
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point O , origine du repère. Construire cette droite sur l'*annexe* à remettre avec la copie.
5. En utilisant le graphique donné en *annexe*, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = 1$ et $t = 2$.
6. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
b) Calculer l'intégrale $\int_1^2 f(t) dt$. En donner une interprétation graphique.

Exercice 2 (11 points)

Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

Dans une usine U , une machine produit des barres de métal.

Dans cette partie on étudie la longueur de ces barres.

On définit la variable aléatoire X qui à chaque barre associe sa longueur exprimée en centimètres et on admet que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 92,50$ et d'écart-type σ .

Une barre de la production est mise au rebut si sa longueur est inférieure à $92,20 \text{ cm}$ ou supérieure à $92,80 \text{ cm}$.

1. On suppose que $\sigma = 0,20$.
 - a) Calculer la probabilité qu'une barre extraite au hasard dans la production de la machine soit mise au rebut.
 - b) Déterminer le réel a tel que la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises entre $92,5 - a$ et $92,5 + a$ soit égale à $0,95$.
2. Quelle valeur faut-il donner à l'écart type σ pour que la probabilité de mise au rebut d'une barre soit égale à $0,08$?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que l'écart type est $\sigma = 0,17$.

Partie B

Dans la production de la machine, 8% des barres sont mises au rebut. On prélève un lot de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine. Le nombre de barres produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 barres.

On appelle N la variable aléatoire qui à chaque lot de 30 barres associe le nombre de barres qui sont mises au rebut dans ce lot.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N et donner ses paramètres. Justifier.
2. Calculer la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut.
3. Calculer la probabilité que dans un tel lot, au moins 90% des barres ne soient pas mises au rebut.

Partie C

La machine se dérégplant dans le temps, on veut tester la moyenne m des longueurs des barres produites par la machine. On se demande si on peut accepter, au seuil de risque de 5%, l'hypothèse selon laquelle la moyenne m des longueurs des barres est encore de $92,50$ cm.

Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral.

On suppose que la variable aléatoire \bar{X} , qui à tout échantillon de 30 barres de métal prélevées au hasard associe la moyenne des longueurs en centimètres des barres de l'échantillon, suit une loi normale de moyenne m et d'écart type $0,03$.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 92,50$ ».

1. Donner l'hypothèse alternative H_1 .
2. Sous l'hypothèse H_0 , calculer le réel h tel que $P(92,5 - h < \bar{X} < 92,5 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision du test.
4. On prélève un échantillon de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine, on obtient les résultats suivants :

Longueurs (en cm)	92,1	92,2	92,3	92,4	92,5	92,6	92,7	92,8	92,9
Nombres de barres	3	2	6	5	5	3	2	2	2

Au vu des résultats de cet échantillon, peut-on admettre au seuil de risque de 5%, l'hypothèse selon laquelle la moyenne m des longueurs des barres est encore de $92,50$ cm ?

Académie :

Session :

Examen ou Concours :

Série* :

Spécialité/option :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

NOM :

(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms :

N° du candidat

Né(e) le :

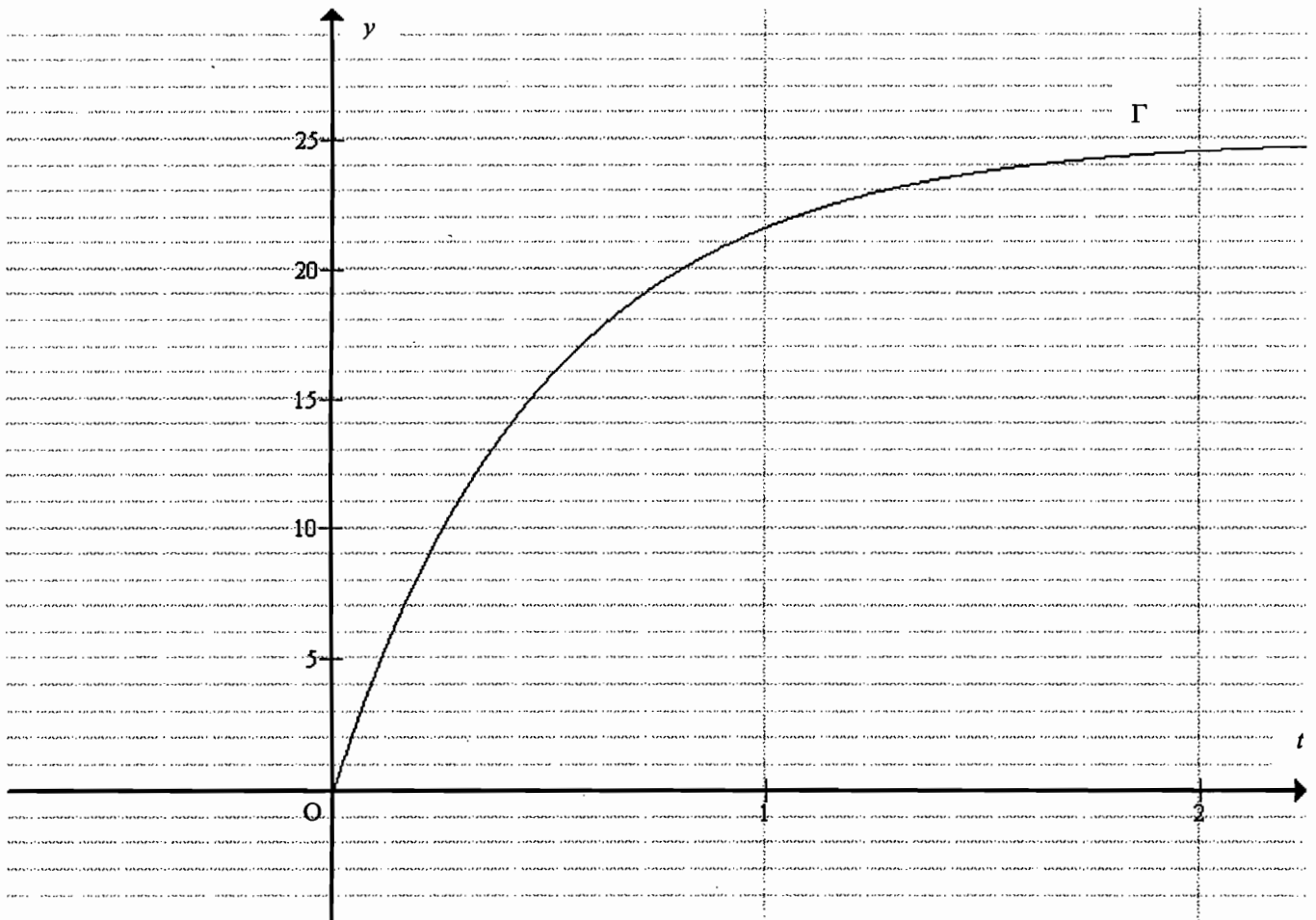
(le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

DANS CE CADRE

MATGRC

ANNEXE (A REMETTRE AVEC LA COPIE)

Exercice 1

Courbe représentative de la fonction f 

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

B.T.S. : groupement C

AGROÉQUIPEMENT

CHARPENTE-COUVERTURE

COMMUNICATION ET INDUSTRIE GRAPHIQUE

**ÉTUDE ET RÉALISATION D'OUTILLAGES DE MISE EN FORME DES
MATÉRIAUX**

INDUSTRIES CÉRAMIQUES

INDUSTRIES CÉRÉALIÈRES

INDUSTRIES DES MATÉRIAUX SOUPLES (2 OPTIONS)

INDUSTRIES PAPETIÈRES

MISE EN FORME DES ALLIAGES MOULÉS

MISE EN FORME DES MATÉRIAUX PAR FORGEAGE

PRODUCTIQUE BOIS ET AMEUBLEMENT

PRODUCTIQUE TEXTILE (4 OPTIONS)

RÉALISATION D'OUVRAGES CHAUDRONNÉS

SYSTÈMES CONSTRUCTIFS BOIS ET HABITAT

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc sin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc tan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt} \dots$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle

Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{M.T.B.F.})$$

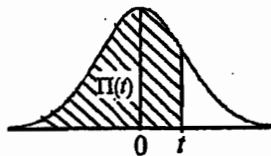
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$