Session 2008

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SOUS ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

GROUPEMENT D

Durée : 2 heures

Spécialité	Coefficient
Analyses Biologiques	1
Bioanalyses et contrôles	2
Biotechnologie	1,5
Hygiène Propreté Environnement	2
Métiers de l'eau	1,5
Peintures, encre et adhésifs	2
Industries Plastiques à Référentiel Commun Européen - Europlastic	1,5
Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries	2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
La calculatrice (conforme à la circulaire n°99-186 du 16-11-99) est autorisée.

Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.

L'annexe page 4 / 6 doit être agrafée à la copie normalisée.
Ce travail doit être effectué par les surveillants de la salle.

Ce sujet comporte 6 pages (y compris celle-ci)

EXERCICE 1 (10 points)

Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution de la température d'une tasse de thé.

Les deux parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}05\,y = 1{,}05$,
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0{,}05\,y = 0.$$

2° Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = a$, où a est un nombre réel.
Déterminer le nombre réel a pour que la fonction h soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 100 pour $t = 0$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 79\,\mathrm{e}^{-0{,}05\,t} + 21$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.
La courbe C est donnée annexe, à rendre avec la copie.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b) Déduire du a) que la courbe C admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
Tracer la droite Δ sur la figure de l'annexe.

2° Résoudre par le calcul dans $[0, +\infty[$ l'équation $f(t) = 21{,}1$.
Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à 10^{-1}.

3° a) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0, +\infty[$.
b) Établir le tableau de variation de f.

4° Démontrer que la valeur moyenne V_m de la fonction f sur $[0, 120]$ est :

$$V_m = 21 + \frac{79}{6}(1 - e^{-6}).$$

C. Exploitation des résultats des parties A et B

Du thé est mis à infuser dans une tasse placée dans une pièce où la température ambiante, supposée constante, est de 21° C.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minutes.
On admet que la température du thé exprimée en degrés Celsius est $f(t)$, où f est la fonction définie au début de la partie *B*.

1° En utilisant le résultat de la question *B*. 2°, donner, à la minute près, l'instant au-delà duquel la température du thé est inférieure à 21,1° C.

2° Déterminer graphiquement, à la minute près, l'instant où la température du thé est de 60° C.
On fera apparaître les constructions utiles sur la figure.

Modèle EN

DANS CE CADRE NE RIEN ÉCRIRE

Académie : Session :

Examen ou concours : Série* :

Spécialité/Option : Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :

NOM :
(en majuscules, suivi s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénoms : N° du candidat

Né(e) le : (le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la liste d'appel)

Examen ou concours : Série* :

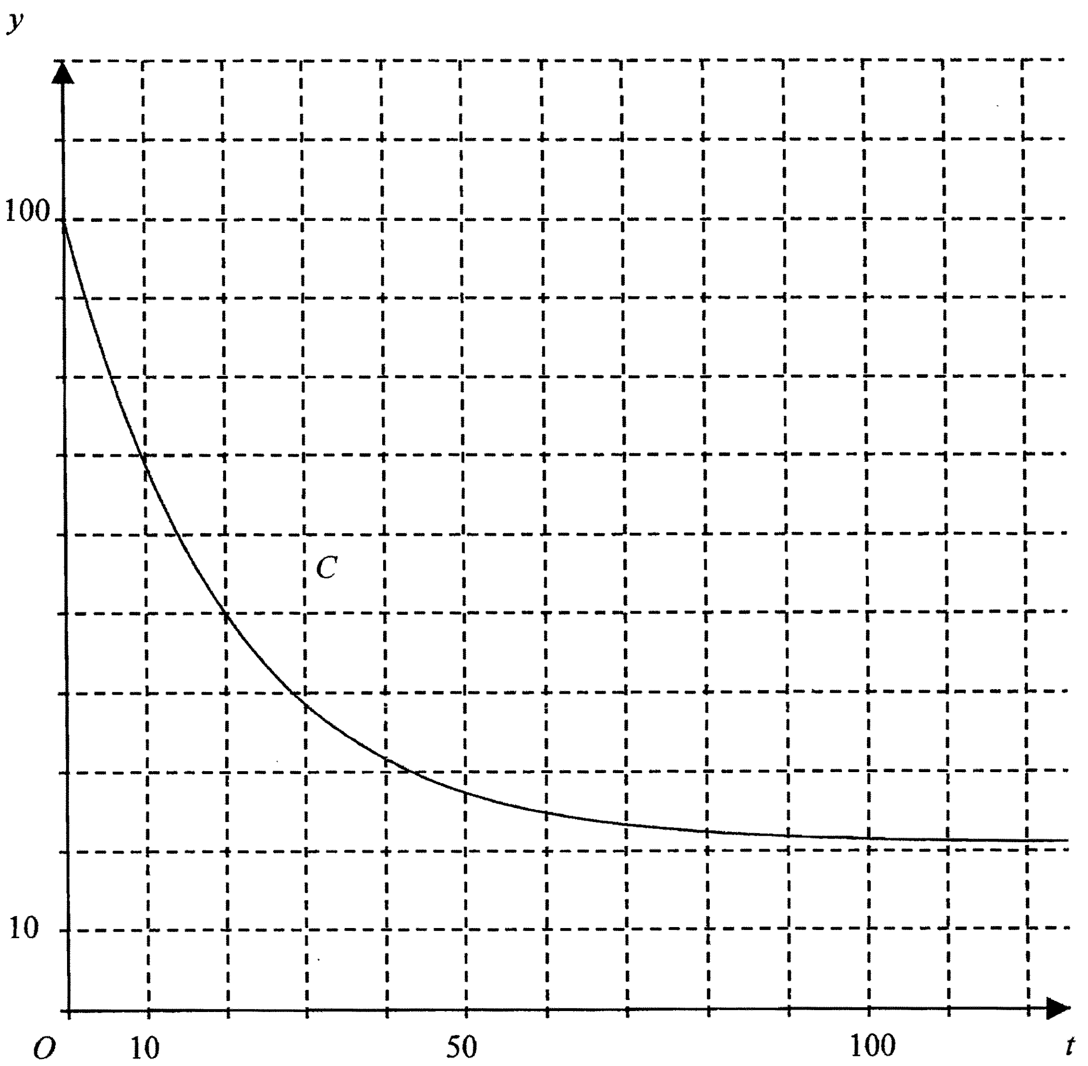
Spécialité/Option :

Repère de l'épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :
(Préciser, suivi s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un industriel de l'agroalimentaire conditionne du ketchup dans des bouteilles en verre.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée associe la masse de sauce, exprimée en grammes, contenue dans cette bouteille.
On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 570 et d'écart type 4.
Une bouteille n'est commercialisée que si la masse de sauce qu'elle contient est comprise entre 560 grammes et 580 grammes.

1° Calculer la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production de la journée soit commercialisée.

2° Calculer la probabilité que la masse de sauce soit supérieure ou égale à 565 grammes.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

1° Dans un stock important de bouteilles destinées aux livraisons en France, 10 % des bouteilles contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.
Les bouteilles sont livrées en France par cartons de 16.
On prélève au hasard 16 bouteilles de ce stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 16 bouteilles.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 16 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

a) Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer la probabilité qu'aucune bouteille de ce prélèvement ne contienne une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

c) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une bouteille au plus, contienne une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.

2° Les bouteilles destinées à l'exportation sont conditionnées par colis de 100.
On prélève au hasard 100 bouteilles pour vérification dans le stock destiné à l'exportation. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bouteilles.
On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 100 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent une masse de sauce inférieure ou égale à 565 grammes.
On admet que la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,1.

a) On considère que la loi suivie par Z peut être approchée par une loi de Poisson.
Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au a).
Calculer $P(Z_1 \leq 5)$.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse de sucre, exprimée en grammes, contenue dans chaque bouteille.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 25 bouteilles dans un lot important.
Soit $\overline{S}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 25 bouteilles prélevées au hasard et avec remise dans ce lot, associe la moyenne des masses de sucre contenue dans les bouteilles de cet échantillon.
On suppose que $\overline{S}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$ avec $\sigma = 7$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-1}, est $\overline{s} = 137,7$.

Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{s}$ de la moyenne μ des masses de sucre contenu dans chacune des bouteilles de ce lot, avec le coefficient de confiance 95 %.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS : groupement D

ANALYSES BIOLOGIQUES

BIOANALYSE ET CONTRÔLES

BIOTECHNOLOGIE

HYGIÈNE-PROPRETÉ-ENVIRONNEMENT

MÉTIERS DE L'EAU

PEINTURES, ENCRES ET ADHÉSIFS

INDUSTRIES PLASTIQUES A RÉFÉRENTIEL COMMUN EUROPEEN - EUROPLASTIC

QUALITÉ DANS LES INDUSTRIES ALIMENTAIRES ET LES BIO-INDUSTRIES

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = \mathrm{e}^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$

$\cos t = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$

$\sin t = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$

$\mathrm{e}^{at} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos(\beta t) + \mathrm{i}\sin(\beta t))$, où $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} \mathrm{e}^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) **Dérivées et primitives**

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$
$$(e^u)' = e^u u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$
$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) **Calcul intégral**

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) **Développements limités**

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$
$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) **Equations différentielles**

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle

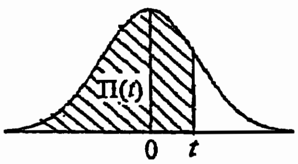
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$