BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2009

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. **L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.**

Deux feuilles de papier millimétré sont fournies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1° Soient M et N les matrices définies par $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $M+N$ est :	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2° Avec les mêmes données qu'au 1° :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times N$ est :	$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 7 & -3 & 9 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

3° $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$ est un repère orthonormal de sens direct de l'espace. On considère les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :	orthogonaux	colinéaires	ni orthogonaux ni colinéaires

4° Avec les mêmes données qu'au 3°,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{0}$	$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (8 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + xy = x$.
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E_0) :
$$y' + xy = 0.$$

2° Démontrer que la fonction constante g, définie sur **R** par $g(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ d'unité graphique 4 centimètres.

1° a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2° a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   b) Donner le tableau de variation de f sur **R**.

3° a) Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe C dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ ***défini au début de la partie B***.

   b) Tracer dans le même repère que la courbe C la courbe P d'équation $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$.

   On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction définie par $x \mapsto 2 - \dfrac{x^2}{2}$.

On constate que les courbes C et P sont proches l'une de l'autre sur l'intervalle $[-0{,}5\,;\,0{,}5]$.

C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)\,dx$.

1° a) En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 - \frac{x^2}{2} + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° a) On note $J = \int_{-0,5}^{0,5} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx$.

Démontrer que $J = \frac{47}{24}$. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-3}.

b) Un logiciel donne $I \approx 1{,}960$. Vérifier que cette valeur approchée de I et la valeur approchée de J obtenue à la question a) diffèrent de 2×10^{-3}.

EXERCICE 3 (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres. On se propose de construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3 et P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré.

Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$:

$P_1(0, 3)$, $P_2(1, -2)$, $P_3(4, 3)$ et $P_4(-2, 5)$.

La courbe B-spline cherchée est la réunion de deux arcs de courbe C_1 et C_2.

A. Détermination d'une représentation paramétrique de l'arc de courbe C_1

1° On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour tout t appartenant à $[0, 1]$ par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t + 2 - i - j)^2}{j!\,(3 - j)!}.$$

Démontrer que, pour tout t de $[0, 1]$, $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$.

2° L'arc de courbe C_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_1} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_3}\ .$$

On admet que pour tout t de $[0, 1]$: $R_1(t) = -t^2 + t + \dfrac{1}{2}$ et $R_2(t) = \dfrac{1}{2}\ t^2$.

Démontrer que l'arc de courbe C_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = t^2 + t + \dfrac{1}{2} \\ y = g_1(t) = 5t^2 - 5t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

B. Étude de variations et construction de la courbe B-spline

1° a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0, 1]$, où f_1 et g_1 sont les fonctions définies à la question 2° de la partie A. Rassembler les résultats dans un tableau unique.

b) Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$, $M_1(1)$.

2° L'arc de courbe C_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2}(t) = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_3} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_4}\ .$$

On admet que l'arc de courbe C_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -\dfrac{9}{2}t^2 + 3t + \dfrac{5}{2} \\ y = g_2(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + 5t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f_2'(t)$	3	$+$	0	$-$	-6
$f_2(t)$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1
$g_2'(t)$	5		$+$		2
$g_2(t)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4

Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$.

3° On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

a) Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$ et $M_1(1)$, puis l'arc de courbe C_1.

b) Construire, sur le même graphique, les tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$, puis l'arc de courbe C_2.

c) Placer les points de définition sur la figure.

4° a) Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbe C_1 et C_2.

b) Montrer que la tangente commune à l'arc C_1 et à l'arc C_2 au point I est la droite (P_2P_3).

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

CPMAT

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$
$$(e^u)' = e^u u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \text{ } u \text{ à valeurs strictement positives}$$
$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$
$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.